This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

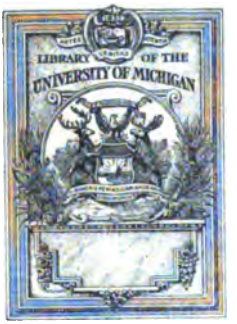
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



FROM THE LIBRARY OF

Professor Karl Heinrich Rau

OF THE UNIVERSITY OF HEIDELBERG

PRESENTED TO THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
BY

Mr. Philo Parsons

OF DETROIT

1871

QA
39
.M211
1808

Florida divinae quisquis sectatur mathesis
Scire cupis, facile mente fruare decet.
Nam licet assidue possis superare labore,
Sens generosa tamen plurima sola capit.

Oronthus Finaeus.

1810

10799

Mathematisches Lehrbuch

zum Gebrauche
öffentlicher Vorlesungen
auf der
königl. baierischen Landes-Universität
zu Landshut,

PARSONS LIBRARY
University of
MICHIGAN

verfaßt von
Maurus Magold,
königl. baierisch. geistl. Rathe und öffentl. ordentl. Professor
der Mathematik allda.

I. Theil,
welcher die Arithmetik enthält
mit 9 Tabellen.

Zweyte vermehrte Ausgabe.

Landshut,
in der Weberschen Buchhandlung.
1808.

C . R a u .

Lehrbuch
der
Arithmetik
zum Gebrauche
öffentlicher Vorlesungen
auf der
königl. baierischen Landes-Universität
in Landshut,

verfaßt von
Maurus Magold,
königl. baierischen geistl. Rathe und öffentl. ordentl.
Professor der Mathematik allda.

Mit 9 Tabellen.

Zweyte vermehrte Ausgabe.

Landshut,
in der Weberschen Buchhandlung.
1808.

Vorrede.

Bey Verfassung dieses Lehrbuches hatte ich nicht nur den Zweck, dem Anfänger in der Mathematik die ersten Kenntnisse davon beyzubringen, sondern auch und zwar vorzüglich den angehenden Akademiker durch das Studium dieser Wissenschaft an's gründliche Denken zu gewöhnen, und ihn dadurch für das Studium der übrigen Wissenschaften vorzubereiten.

Beym ersten Cursus würde ich rathen, so wie ich es zum Theile in meinen öffentlichen Vorlesungen selbst thue, den sechsten und siebenten Abschnitt des dritten Hauptstückes, den vierten, fünften und sechsten Abschnitt des vierten Hauptstückes, den dritten Abschnitt des sechsten Hauptstückes, und endlich das ganze achte Hauptstück zu überschlagen. Ich

nahm

nahm dieſe Lehren ins Lehrbuch auf, weil ich jenen, die mehr Mathematik zu lernen verlangen, gerne die Hand biethen, und die Fortſetzung ihres Studiums erleichtern wollte; und ich wies dieſen Lehren jenen Platz an, der ihnen ihrem Inhalte nach zukömmt, und für den Studierenden beym zweyten Nachholen vortheilhaft iſt, indem er nun die Lehren in ihrem Zuſammenhange einſehen lernt.

Die Entfernung des Druckortes, wodurch zur Zeit und Koſtenerſparniß nur eine Reviſion von mir vorgenommen werden konnte, iſt der Grund, daß mehrere Druckfehler ſich einſchlichen, als außer dem geſchehen ſeyn würde.

Mit Ehrfurcht nenne ich jene Männer, durch deren ſchätzbare Bücher ich mich gebildet, und die ich bey dieſem Lehrbuche benutzet habe, nemlich Carnot, Euler, Käſtner, Karſten, Lorenz, Maaß, Schulz und Vega.

Landshut den 17. April 1802.

Vorrede
zur
zweyten Ausgabe.

Bey gegenwärtiger zweyten Ausgabe des ersten Theils des mathematischen Lehrbuches ist im wesentlichen nichts geändert, und der folgenden Bände wegen wurde die nämliche Ordnung aller §. beybehalten; indessen erhält doch diese zweyte Ausgabe durch Reinigung von den vielen Druckfehlern, durch sorgfältige Umarbeitung einiger Beweise, durch Zusätze, die vorzüglich in der praktischen Rechenkunst beträchtlich sind, einen bedeuten-

den

den Gewinn an Deutlichkeit, Gründlichkeit, und Vollständigkeit, wie man ſich leicht durch Vergleichung beyder Ausgaben überzeugen kann.

Außer den in der erſten Ausgabe angeführten Büchern benützte ich noch Florencourt's Abhandlungen aus der juriſtiſchen und politiſchen Rechenkunſt.

Landshut den 1. Sept. 1807.

Magold.

Innhalt.

Seite.

Einleitung in die gesammte Mathematik. . . 1

I. Vom Gegenstande der Mathematik, und ihren verschiedenen Theilen. 1

II. Von der mathematischen Methode. . . . 7

III. Vom Nutzen der Mathematik. 11

IV. Von den Zeichen und Grundsätzen der Mathematik. 12

Arithmetik.

I. Hauptstück von ganzen Zahlen und Größen. 14

I. Abschnitt von verschiedenen Zahlensystemen, und ihrer Bezeichnungsart. 14

Seite

II. Abschnitt von der Addition und Subtraction ganzer Zahlen und Größen. 22

III. Abschnitt von der Multiplication und Division ganzer Zahlen und Größen. 36

IV. Abschnitt von der Theilbarkeit ganzer Zahlen. 60

II. Hauptstück von gebrochenen Zahlen. . . 70

I. Abschnitt von der Beschaffenheit der Brüche überhaupt und ihrer Bezeichnungsart. . . 70

II. Abschnitt von den vier Rechnungsarten mit Brüchen überhaupt. 78

III. Abschnitt von Decimalbrüchen insbesondere. 85

III. Hauptstück von Potenzen und Wurzeln der Zahlen. 92

I. Abschnitt von der Erzeugung der Potenzen, und Ausziehung der Wurzeln aus einfachen Größen. 92

II. Abschnitt Rechnungsarten mit Potenzen. 101

III. Abschnitt Rechnungsarten mit Wurzelgrößen. 111

Seite

IV. Abſchnitt von dem Quadrate, und der Quadratwurzel vieltheiliger Größen. . . 116

V. Abſchnitt vom Cubus, und der Cubikwurzel vieltheiliger Größen. 132

VI. Abſchnitt vom binomiſchen Lehrſatze. . 149

VII. Abſchnitt von den Permutationen und Combinationen. 166

IV. Hauptſtück von Gleichungen. 178

I. Abſchnitt von Gleichungen überhaupt. . 178

II. Abſchnitt von einfachen Gleichungen. . 183

III. Abſchnitt von quadratiſchen Gleichungen. 190

IV. Abſchnitt von der Natur und Reduction der höhern Gleichungen überhaupt. . . . 195

V. Abſchnitt von der Auflöſung höherer Gleichungen. 212

VI. Abſchnitt von Funktionen. 225

V. Hauptſtück von Verhältniſſen. . . . 241

I. Abſchnitt von Verhältniſſen überhaupt. . 241

Seite

II. Abschnitt von arithmetischen Proportionen, und Progressionen der Zahlen. 250

III. Abschnitt von geometrischen Proportionen der Zahlen. 262

IV. Abschnitt von geometrischen Progressionen. 276

VI. Hauptstück von den Logarithmen. . . . 290

I. Abschnitt von Logarithmen überhaupt. . 290

II. Abschnitt von briggischen Logarithmen. 294

III. Abschnitt. Berechnung der Logarithmen durch Auflösung der Functionen in Reihen. 299

IV. Abschnitt vom Gebrauche der am Ende beygefügten kleinern logarithmischen Tabellen. 314

V. Abschnitt. Anwendung der Logarithmen auf die Rechnungen mit Ziffern. 322

VII. Hauptstück. Practische Rechenkunst. 329

I. Abschnitt. Anwendung der vier Rechnungsarten. 329

II. Abschnitt. Anwendung der Proportionslehre. 33

Seite

III. Abschnitt. Anwendung der Progressionslehre. 355

VIII. Hauptstück von der Infinitesimalrechnung. 394

I. Abschnitt vom Begriffe, und den Grundsätzen der Infinitesimalrechnung. 394

II. Abschnitt. Differentialrechnung. . . . 404

III. Abschnitt. Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung des größten und kleinsten Werthes einer Function. . 423

IV. Abschnitt. Integralrechnung. 431

Anhang von den in verschiedenen Ländern, vorzüglich in Baiern üblichen Maaße, Gewichte, und Münzen. 459

I. Abtheilung. Vom Maaße. . . . 459

I. Vom Längenmaaße. 459

II. Vom Flächenmaaße. 467

III. Vom Körpermaaße. 468

Seite

II. Abtheilung. Vom Gewichte. . 481

III. Abtheilung. Von Münzen. . 489

Tabelle der gemeinen, oder briggischen Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000. 497

Einleitung
in die
gesammte Mathematik.

I.
Vom Gegenstande der Mathematik, und ihren verschiedenen Theilen.

§. 1.

Erklärungen:

a. Dinge heißen einerley (entia eadem), wenn in dem einen alles, wie in dem andern ist, verschieden (diversa), wenn in dem einen etwas ist, was in dem andern nicht ist.

b. Gleichartig (homogenea) nennt man Dinge, in wie ferne man nur auf jenes sieht, was sie miteinander gemein haben; ungleichartig (heterogenea), in wie fern man auf das sieht, was in ihnen verschieden ist. z. B. Ein Baier und ein Schwab sind als Teutsche gleichartig, hingegen in

wiefern der eine ein Baier, der andere ein Schwab ist, ungleichartig.

c. Ein Ding, in wiefern es ein gleichartiges Mannigfaltiges oder Quantität hat, heißt eine Größe (Quantum).

d. Wird die Größe eines Dinges B durch ein ihm gleichartiges Ding A bestimmt, das ist, angegeben, wie oft A genommen werden muß, um B zu erzeugen, so heißt A das Maaß oder die Einheit, dieses Bestimmen selbst ein Messen oder Zählen, und die bestimmte Quantität eine Zahl oder die relative Größe von B, so wie B selbst, als Aggregat der zusammengezählten Einheiten A, eine gezählte Größe, z. B. für das Quantum 12 fl. ist der Werth des Guldens die Einheit A, und in Beziehung auf diese Einheit die Zahl 12 die relative Größe desselben. Man nennt wohl auch gezählte Größen, in wiefern man von der Beschaffenheit ihrer Einheiten abstrahirt, also nur auf die Anzahl der letztern sieht, bloße Zahlen.

e. Dinge von einerley Quantität heißen gleich (aequalia), von einerley Qualität ähnlich (similia), von einerley Quantität und Qualität congruent (Congruentia).

f. Eine Größe heißt stetig, fließend (quantum continuum), wenn das Gleichartige in ihr so zusammenhängt, daß das Aufhören des einen zugleich der Anfang des andern ist. Z. B. die Zeit, wo das Ende der vergangenen zugleich der Anfang der zukünf-

künftigen ist. Dißcret (quantum discretum) nennt man eine Größe, wenn das Mannigfaltige abgesondert ist, z. B. ein Haufen Weizenkörner.

§. 2.

Erklärung:

Mathematik (μαθημα, μαθησις, disciplina, scientia) ist die Wissenschaft der Größen (Scientia quantorum).

Anmerk. Den Namen-Wissenschaft ohne Beysatz erhielt sie bey den Griechen vermuthlich ihres Alters, und der Evidenz ihrer Lehren wegen.

§. 3.

Theile der Mathematik sind:

a. Die **Arithmetik** oder **Zahlenlehre** (ἀριθμὸς numerus), die Wissenschaft der Zahlen, und gezählter Größen. Die dißcrete Größen, als Aggregate Zahlen sind, und stetige Größen, ebenfalls gezählt werden können, so heißt sie auch **allgemeine Größenlehre** (Mathesis universalis). a

b. Die **Geometrie** (γεωμετρία terræ mensura) die Wissenschaft von stetigen ausgedehnten Größen.

c. Die **Trigonometrie** (τριγωνος μετρον, trianguli mensura) die Wissenschaft aus dreyen gegebenen Stücken eines Dreyeckes, die übrigen drey durch Rechnung zu finden; sie entsteht aus der Verbindung der Geometrie und Arithmetik.

§. 4.

Die Mathematik heißt:

a. rein (Matheſis pura), wenn man von allen wirklichen Gegenſtänden abſtrahirt,

b. gemiſcht oder angewandt (Matheſis adplicata), wenn die Lehren der reinen Mathematik auf wirkliche Gegenſtände bezogen werden.

§. 5.

Mathematik wird endlich in Rückſicht ihrer Lehren ſowohl als der beym Vortrage gebrauchten Methode eingetheilt

A in die Elementarmathematik, deren Methode ſynthetiſch iſt, und die ſich bey ihren Lehren auf die erſten Anfangsgründe einſchränkt, und zwar

a. in der Elementararithmetik, wo aber die Gränzen noch ſchwankend ſind, auf die leichtern Verknüpfungen ganzer und gebrochener Zahlen, der Potenzen vom zweyten und dritten Grade.

b. in der Elementargeometrie auf die gerade und Kreislinie, und ſolche Flächen und Körper, die ſich durch dieſe Linien darſtellen laſſen.

B in die höhere Mathematik (Matheſis ſublimior) deren Methode analytiſch iſt, und die man auch deßwegen die Analys nennt. Sie fährt bey ihren Lehren da fort, wo es die Elementarmathematik ließ, und entwickelt die ſchwereren Aufgaben und Lehrſätze.

a. zur höhern Mathematik gehören die Algebra, die Differenzial- und Integralrechnung.

b. die höhere Geometrie dehnt sich in ihren Untersuchungen auf alle krumme Linien, Flächen, und Körper aus, die sich nicht durch gerade, oder Kreislinien darstellen lassen.

§. 6.

Zur angewandten Mathematik gehören

A die practische Rechenkunst, die Anwendung der Arithmetik auf die gewöhnlichen Rechnungsfälle im bürgerlichen Leben;

B die practische Geometrie, die Anwendung der Geometrie und Trigonometrie auf die Bestimmung der Längen, Höhen, Flächen

a. auf der Oberfläche der Erde, die Landmeßkunst (geodaesia, γεωδαισία, terrae distributio).

b. unter der Oberfläche der Erde, die Markscheidekunst, (geometria subterranea).

Anmerk. Diese Wissenschaften werden gewöhnlich den Lehren der reinen Mathematik entweder eingeschaltet, oder am Ende beygefügt.

§ 7.

Unter angewandter Mathematik ohne Beysatz versteht man dermal

A die mechanischen Wissenschaften, vom Gleichgewichte und der Bewegung, und zwar

a. schwe-

a. ſchwerer feſter Körper, die Statik (στατικη, nemlich τεχνη, ars, quae ponderum rationem reddit,), und Mechanik (μηχανικη, ars machinalis).

b. ſchwerer flüßiger Körper, die Hydroſtatik (ὑδροστατικη, von ὑδρος, Waſſer, und στατικη τεχνη) und Hydraulik (ὑδραυλικη, von ὕδωρ und αυλος, Waſſer-Röhre oder = Leitung).

c. der Luft, als eines ſchweren, flüßigen, und elaſtiſchen Körpers, die Aerometrie (αερομετρια aëris menſura).

B die optiſchen Wiſſenſchaften vom Lichte.

a. die Optik, (ὀπτικη von ὀπτω, ſehen), vom Lichte, das vom Gegenſtande in gerader Linie allenthalben ſich verbreitet,

b. die Perſpectiv, von der Zeichnung eines Gegenſtandes auf einer Ebene, die zwiſchen ihm und dem Auge in einer beſtimmten Lage geſetzt iſt,

c. die Katoptrik (καταοπτρικη von κατα, entgegen oder zurück) vom zurückgeworfenen Lichte,

d. die Dioptrik (Διοπτρικη von δια durch) vom gebrochenem Lichte.

C die aſtronomiſchen Wiſſenſchaften, von den Körpern des Weltgebäudes, und dem dadurch beſtimmten Raum und Zeitmaaße auf unſerer Erde.

a. die Aſtronomie (Αστρονομια, Aſtrorum menſura), von der Größe, Bewegung und Verbindung der Weltkörper;

b. die

b. die Geographie (Γεωγραφια, terrae descriptio) von der Figur, Größe der Erde, und der Lage der Oerter auf ihrer Oberfläche durch Astronomie bestimmt;

c. die Chronologie (Χρονολογια, temporis determinatio) oder astronomische Zeitbestimmung,

d. die Gnomonik (Γνωμονικη von γνωμον Stylus horas indicans) vom Zeitmaaße vermittels des Schattens.

D die architectonischen Wissenschaften, als

a. die Baukunst,

b. die Artillerie,

c. die Fortification.

Anmerk. Die architectonischen Wissenschaften, ob sie gleich mathematische Kenntnisse voraussetzen, fodern außer diesen noch ganz andere Kenntnisse, und müssen daher aus eigenen Lehrbüchern vollständig erlernet werden; in den mathematischen Lehrbüchern werden sie meist nur sehr kurz am Ende berührt, oder gar weggelassen.

II.

Von der mathematischen Methode.

§. 8.

Die Titel, nach welchen in der Mathematik, so wie in jeder strengen Wissenschaft die Lehren vorgetragen werden, sind:

a. Erklärungen,

b. Sätze,

c. Beweise,

d. Anmerkungen.

§. 9.

§. 9.

Eine Erklärung (Definitio) heißt eine deutliche und präciſe Darſtellung des vollſtändigen Begriffes einer Sache. Sie heißt

a. **genetiſch**, oder **Sacherklärung** (Definitio realis, genetica), wenn ſie die Art angiebt, wie die Sache entſtehen kann, oder was einerley iſt, wenn ſie die Möglichkeit der Sache darthut;

b. **Worterklärung** (Definitio nominalis), wenn durch ſie die Möglichkeit der Sache nicht beſtimmt iſt.

§. 10.

Ein Satz, der angiebt, daß etwas ſo, oder nicht ſo ſey, heißt ein **theoretiſcher Satz** (Propoſitio theoretica), und zwar

a. ein **Grundſatz** (Axioma), deſſen Wahrheit ſchon einleuchtet, ſobald man den Sinn deſſelben gefaßt hat;

b. ein **Lehrſatz** (Theorema), deſſen Wahrheit aus andern bekannten Wahrheiten abgeleitet werden muß, oder der eines Beweiſes bedarf.

§. 11.

Ein Satz, der etwas zu bewerkſtelligen verlangt, oder angiebt, daß etwas geſchehen kann, oder ſoll, heißt ein **practiſcher Satz** (Propoſitio practica), und zwar

a. eine **Foderung**, ein **Heiſcheſatz** (Poſtulatum), wenn die Möglichkeit ihm genüge zu leiſten unmittelbar einleichtet, ſo bald man nur verſteht, was gefodert wird;

b. eine

b. eine **Aufgabe** (Problema), wenn

α die Art der Verrichtung erst bestimmt, welches man die **Auflösung** (Solutio) nennt, und

β die Richtigkeit der Auflösung dargethan werden muß, das ist, die Auflösung eines Beweises bedarf.

§. 12.

Man unterscheidet endlich noch

a. **Zusätze** (corollaria), Sätze, die aus andern unmittelbar oder durch einen leichten Schluß folgen,

b. **Lehnsätze** (Lemmata), Sätze aus dem Gebiethe anderer Wissenschaften z. B. in der angewandten Mathematik Sätze aus der Naturlehre;

c. **Anmerkungen** (Scholia) was zur Erläuterung, Anwendung u. s. f. des vorhergehenden beygesetzt wird, mithin keinen Bestandtheil des Ganzen im strengsten Sinne ausmacht.

§. 13.

Ein **Beweis** (Demonstratio), die Darstellung der Wahrheit eines Satzes aus andern schon bekannten unbezweifelten Wahrheiten, heißt

a. **direct**, wenn er die Richtigkeit des Satzes geradezu zeigt,

b. **indirect, apogogisch**, wenn er die Unmöglichkeit des Gegentheils darthut.

§. 14.

In Rückſicht der Ordnung, nach welcher die Sätze in einem Beweiſe aufeinander folgen, iſt ein Beweis

a. ſynthetiſch, wenn er von Gründen ausgeht, und zur Concluſion fortführt,

b. analytiſch, wenn er von der Concluſion ausgeht, und zu den Gründen zurückführt.

§. 15.

Die mathematiſche Methode iſt ſcientiviſch, und als ſolche jeder Wiſſenſchaft gemeinſchaftlich; aber die Mathematik hat noch überdieß den auszeichnenden Vorzug, daß ſie ihre Begriffe conſtruiren, das iſt, die Gegenſtände derſelben in ihrer Allgemeinheit anſchaulich darſtellen, folglich die Beſtimmungen davon im ſtrengen Sinne demonſtriren kann, während der Philoſoph in ſeinem allgemeinen Satze, der ſich wohl durch einzelne anſchauliche Beyſpiele erläutern, aber nicht beweiſen läßt, die einzelnen Wahrheiten als enthalten vorſtellt, und aus ſelben ableitet; die philoſophiſche Methode iſt nemlich diſcurſiv, jene der Mathematik hingegen intuitiv, daher die Evidenz der letztern, die nur ihr eigenthümlich, und für alle andere Wiſſenſchaften unerreichbar iſt.

Anmerk. Im Verfolge läßt ſich der Unterſchied zwiſchen der philoſophiſchen und mathematiſchen Methode durch öftere Vergleichung ihrer Beweisarten dem Anfänger erſt vollkommen verſtändlich machen.

III.

Vom Nutzen der Mathematik.

§. 16.

Die §. 6. und 7. angeführten Theile der angewandten Mathematik beweisen den entschiedenen Einfluß ihrer Lehren auf die Befriedigung der dringendsten Bedürfnisse durch alle Zweige der menschlichen Gesellschaft; mit Rechte also genoß sie bisher immer die Achtung aller gesitteter Nationen, und jede Verbreitung derselben ist Beförderung des allgemeinen Menschenglückes.

§. 17.

Ausser diesen Vortheilen ist das sorgfältige Studium der Mathematik schon für sich jedem angehenden Philosophen sehr zu empfehlen; denn

a. dadurch gelangt er in den Besitz einer Menge Wahrheiten, und Wahrheit muß doch dem Freunde der Weisheit schon für sich unschätzbar seyn;

b. die Evidenz ihrer Lehren gewährt bey ihrem Anblicke das reinste Vergnügen;

c. Mathematik ist ausübende Logik, und als solche weckt und pflegt sie den philosophischen Forschungsgeist, übt und gewöhnt ans gründliche Denken, erzeugt also jene Geistesstimmung, die man beym Eintritte zu allen übrigen Wissenschaften mitbringen muß.

IV.

Von den Zeichen, und Grundsätzen der Mathematik.

§. 18.

1. Das Zeichen der Gleichheit ist (=); A = B will sagen: A sey eben so groß als B.

2. Die Ungleichheit drückt das Zeichen (<) dergestalt aus, daß die Spitze auf die kleinere Größe, und die Oeffnung auf die größere hinweiset.

A < B heißt: A ist kleiner als B, und B ist größer als A.

3. Das Zeichen ($\sim$) drückt die Aehnlichkeit aus. Z. B. A $\sim$ B liest man: A ist der Größe B ähnlich.

4. Zur Bezeichnung der Congruenz dient ($\cong$); oder A $\cong$ B will sagen: die Größen A und B sind einander ähnlich und gleich, das ist, congruent.

5. Das Unendlichgroße wird durch (∞), und das Unendlichkleine durch ($\frac{1}{\infty}$) bezeichnet.

§. 19.

Grundsätze der ganzen Mathematik:

1. Jede Größe ist sich selbst gleich; oder A = A.

2. Das Ganze ist seinen Theilen zusammen genommen gleich.

3. Das

3. Das Ganze ist grösser, als ein oder einige Theile desselben.

4. Zwey Grösen, die einer dritten gleich, sind auch unter sich gleich, d. i. wenn $A=B$; $A=C$, so ist auch $B=C$.

5. Was grösser als eine von zweyen gleichen Grösen, das ist auch grösser, als die andere. Z. B. wenn $A>B$, $B=C$, so ist $A>C$.

6. Was kleiner als eine von zweyen gleichen Grösen, ist auch kleiner, als die andere, das ist: wenn $A<B$, $B=C$; so ist $A<C$.

7. Was grösser als die grösere von zweyen ungleichen Grösen, das ist auch grösser, als die kleinere, oder wenn $A>B$, $B>C$; so ist $A>C$.

8. Was kleiner als die kleinere von zweyen ungleichen Grösen, das ist auch kleiner, als die grösere. Wenn $A<B$; $B<C$; so ist $A<C$.

9. Gleiches auf gleiche Art verändert, giebt wieder Gleiches; hingegen Gleiches auf ungleiche Art, oder Ungleiches auf gleiche Art verändert, giebt Ungleiches.

10. Congruente Dinge sind vollkommen einerley, und lassen sich daher füreinander substituiren.

11. Gleiche Grösen lassen sich füreinander in Rücksicht ihrer Gleichheit, so wie ähnliche in Rücksicht ihrer Aehnlichkeit füreinander setzen.

Arithmetik.

I. Hauptstück.

Von ganzen Zahlen und Größen.

I. Abschnitt.

Von verschiedenen Zahlensystemen, und ihrer Bezeichnungsart.

§. 20.

Erklärungen:

a. Wenn die Einheit A (§. 1. d.) der Größe B selbst wieder aus einer andern C etlichmal genommen erzeugt ist, so heißt sie **relative Einheit** von B, und in Rücksicht C eine Einheit höherer Art, so wie C die niedere Einheit.

b. Wenn aber A aus keiner andern Einheit C erzeugt ist, mithin nicht als Inbegriff niederer Einheiten betrachtet werden kann, so heißt sie **absolute oder primitive Einheit.**

§. 21.

§. 21.

Erklärung:

a. Eine Größe B, in wieferne sie als Inbegriff mehrerer Einheiten A betrachtet wird, also ein Ganzes ist, heißt eine ganze Zahl;

b. In wieferne sie aber selbst nur einen oder mehrere Theile einer andern D, mithin nicht das Ganze davon enthält, eine gebrochene Zahl.

Zusatz.

Relative Einheiten sind in Rücksicht der niedern Einheiten ganze Zahlen, in Rücksicht der höhern Einheiten gebrochene Zahlen.

§. 22.

Erklärung:

Wenn man immer eine bestimmte Anzahl von Einheiten zusammen nimmt, und aus ihrem Inbegriffe eine Einheit höherer Ordnung bildet, so heißt die nach einer bestimmten Regel festgesetzte Subordination der Zahlen, ein Zahlensystem, und zwar

a. Decimalsystem, Dekadik, wenn immer zehen Einheiten einer Art zusammengenommen eine höhere Einheit, und wieder zehen von letztern eine Einheit von noch höherer Art bilden.

b. Duodecimalsystem, Dodekadik, wenn eine Einheit höherer Art immer aus zwölf Einheiten der nächst niedern Art besteht.

Anmerk.

Anmerk. Daß sich auf ähnliche Art mehrere andere Systeme als Dyadik u. s. w. denken lassen, leuchtet für sich ein.

§. 23.

Erklärung:

Im Decimalsysteme, welches fast bey allen Nationen von jeher üblich war, und wegen der Anzahl der Finger an beyden Händen das anschaulichste, also natürlichste ist, nimmt man zehen Einer für eine Einheit der zweyten Ordnung, und nennt sie einen Zehner, zehen Einheiten der zweyten Ordnung geben eine Einheit der dritten Ordnung, die Hundert heißt, zehen Hunderte machen Tausend, das ist Einer von Tausenden; aus ihnen entstehen wieder Zehner, und Hunderte von Tausend; Tausendmal Tausend oder zehen von Hundert Tausenden geben eine Million; nun nimmt man aufs neue Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. von Millionen: auf die nemliche Art entstehen Billionen, Trillionen u. s. f.

§. 24.

Erklärung:

Im Decimalsysteme drückt man

a. die Anzahl der Einheiten jeder Ordnung durch nachstehende Zeichen aus, die man arabische Ziffern nennt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Erstere neun Zeichen sind Zahlziffern, letzteres zeigt den Mangel einer Zahl an, und heißt daher Null

oder

oder Nichts. Diese Anzahl der Einheiten, welche die Ziffern für sich genommen darstellen, macht ihren natürlichen Werth aus; so ist vier der natürliche Werth vom Ziffer 4.

b. die Ordnung der Einheiten bezeichnet man durch die Ordnung der Stellen, die man von der rechten zur linken Seite den Ziffern giebt, und in diesem besteht ihr Localwerth. Z. B. 324 bezeichnet 4 Einer, 2 Zehner, 3 Hunderter.

I. Anmerk. Die Griechen und Römer, ob sie gleich nach dem Decimalsysteme rechneten, bedienten sich, und zwar erstere des ganzen Alphabetes, letztere einiger Buchstaben desselben zur Bezeichnung der Zahlen; aber allemal mußte die Art damit zu rechnen sehr beschwerlich seyn.

II. Anmerk. Wollte man im Decimalsysteme nur mit zwey Ziffern z. B. 1, 0 die Zahlen ausdrücken, so lassen sich die erste zehen Zahlen auf folgende Art darstellen:

Eins	= 1	Sechs	= 110
Zwey	= 10	Sieben	= 111
Drey	= 11	Acht	= 1000
Vier	= 100	Neun	= 1001
Fünf	= 101	Zehen	= 1010 u. s. f.

Man sieht aber sogleich, daß hier eine größere Zahl nicht leicht auf einmal überschauet werden kann, mithin daß diese Bezeichnungsart der gewöhnlichen weit nachstehe.

Conf. Vellnagel numerandi methodi s. arithmeticae omnes possibiles. Jenae 1740. und über [illegible] : [illegible] militaris Journal I. Band. 4 Stück. S. 296 ff.

III. Anmerk. Wollte man aber nach dem Duodecimalsystem rechnen, und sich dabey der gewöhnlichen Ziffer bedienen, so muß man für die Zahl Zehn und Eilf eigene Zeichen haben z. B. nach Herrn Horstig für Zehen (Ɫ) einen umgekehrten Siebner, und für Eilf (Ɛ) einen umgekehrten Dreyer. Die ersten zwölf Zahlen lassen sich auf folgende Art der Ordnung nach ausdrücken:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Ɫ, Ɛ, 10.

Wo wieder (0) Null oder Nichts ist. Ferner könnte man die Einer der zweyten Ordnung Duzent, jene der dritten Zwölfer, die der vierten Dodekaden nennen, mithin würde 3 7 Ɫ Ɛ gelesen werden: drey Dodekaden, sieben Zwölfer, zehen Duzent, Eilf. Da die Zahl zwölf durch 2, 3, 4, 6; hingegen die Zahl zehen nur durch 2, 5 theilbar ist, und da ferner im bürgerlichen Leben in vielen Fällen das Duodecimal, oder Sexagesimalmaaß gebraucht wird, so ist unläugbar, daß die Rechnung nach dem Duodecimalsysteme viele Vortheile gewähre; hingegen vermißt man an selbem das Natürliche und Anschauliche des Decimalsystemes, und kann doch dabey, sobald andere Maaße vorkommen, verschiedener Reductionen nicht entbehren.

§. 25.

Aufgabe:

Eine durch Ziffern ausgedrückte Zahl auszusprechen, oder zu lesen. Z. B.

2 4 5 6 8 7 4 0 0 0 3 2 5 2 0 1 0 2 0 3

Auf-

Auflösung:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Classen von 6 Ziffern.

2. Am Ende der ersten setze man oben das Zeichen (') welches Million ausdrückt, am Ende der zweyten (") die Billion, am Ende der dritten ("') oder Trillion u. s. f.

3. Jede Classe halbire man durch das Zeichen (,), welches mit Tausend gelesen wird, das ist:

2 4"' 5 6 8, 7 4 0" 0 0 3, 2 5 2' 0 1 0, 2 0 3

4. Nun lese man allemal auf einmal die zwischen ein paar Zeichen eingeschlossenen Ziffer (immer drey, ausser in der höchsten Classe, wo manchmal nur zwey oder eines da ist) mit dem am Ende stehenden Zeichen; das ist:

5. Vier und Zwanzig Trillionen, 568 Tausend, 740 Billionen, 3 Tausend, 252 Millionen, 10 Tausend, 203.

6. Da sich die Zeichen von Billionen, Millionen u. s. f. allemal auf alle 6 Ziffern einer Classe erstrecken, so müssen sie gelesen werden, wenn auch nur ein Zahlziffer in dieser Classe vorkömmt. Z. B.

2, 0 0 0"' 3 2 4, 0 0 0" 0 0 0, 2 0 0' 0 0 0, 0 0 0

muß gelesen werden: 2 Tausend Trillionen, 324 Tausend Billionen, 200 Millionen.

Der Beweis liegt unmittelbar in §. 23 u. 24.

§. 26.

Aufgabe:

Eine gegebene Zahl in Ziffern auszudrücken: z. B. Vier und sechzig Tausend dreyhundert vier und zwanzig Billionen, zweyhundert sechs und dreyßig Millionen, vier und zwanzig.

1. Man bedenke, daß nach §. 23. und 24. zu jeder Hauptclasse, das ist zu Millionen, Billionen u. s. f. (die höchste ausgenommen) allemal 6 Ziffern erfodert werden, ferner daß

2. Jede Classe in zwey Theile getheilet in den höhern drey Ziffern die Tausende, in den drey niedern die Einer dieser Classe enthalten sind; mithin

3. Da auf einmal immer nur drey Ziffern ausgesprochen werden, so schreibe man solche auf einmal (was doch jeder leicht kann), und setze, im Falle es Tausende sind, unten ein Strichgen am Ende oder (,), sind es hingegen Einheiten von Millionen, Billionen u. s. w., oben eines oder zwey Strichgen d. i. (′) (″) u. s. f.

4. Die übrigen Stellen jeder Classe, von welchen in der ausgesprochenen Zahl nichts vorkömt, fülle man mit Nullen aus; so im gegebenen Beyspiele:

6 4, 3 2 4″ 0 0 0, 2 3 6′ 0 0 0, 0 2 4

§. 27.

Erklärung:

Eine durch Ziffern ausgedrückte Zahl aussprechen §. 25, oder eine gegebene Zahl mit Ziffern bezeichnen §. 26, heißt Numeriren.

§. 28.

Erklärung:

a. Um allgemeine, das ist, noch unbestimmte Zahlen auszudrücken, bedient man sich der Buchstaben, und zwar

α der Anfangsbuchstaben, wenn sie gegebene, oder bekannte Zahlen bezeichnen, z. B. a, b, c.

β der Endesbuchstaben, wenn sie unbekannte Zahlen und Größen ausdrücken sollen.

b. Manchmal nimmt man selbst bestimmten Zahlen der Kürze wegen Buchstaben.

c. Sind nun die nemlichen Größen öfter da, so setzt man solchen eine Ziffer vor, die ihre Anzahl angiebt, und welche man den Coefficienten dieser Größe nennt.

d. die Rechnung mit Zahlen,

α die durch Ziffern ausgedrückt sind, heißt daher die Ziffern- oder auch schlechthin die Zahlenrechnung.

β wenn hingegen solche mit Buchstaben bezeichnet sind, die Buchstabenrechnung (calculus litteralis).

I. Zusatz:

I. Zusatz:

Obgleich a in der Buchstabenrechnung jede Größe bezeichnen kann, so bezieht sich doch der nämliche Buchstabe a in der nämlichen Rechnung immer auf die nämliche Größe, und dieses versteht sich von selbst von allen übrigen Buchstaben.

II. Zusatz:

In der Buchstabenrechnung sind die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Größen **gleichartig**, z. B. 4 a, 5 a u. s. f.; die mit verschiedenen Buchstaben bezeichneten **ungleichartig** z. B. 4 a, 3 b, 4 c u. s. f. Es mögen ihre Coefficienten beschaffen seyn, wie sie wollen. (§. 1. b.)

Anmerkung:

Um die Lehren in der Zifferrechnung mit gehöriger Schärfe zu beweisen, ist's zuträglich, ihnen sogleich die Buchstabenrechnung beyzufügen.

II. Abschnitt.

Von der Addition und Subtraction ganzer Zahlen und Größen.

§. 29.

Erklärung:

a. **Addiren** heißt eine Größe finden, die mehrern gegebenen zusammengenommen gleich ist, letztere Größen nennet man die **Summanden**, erstere die **Summe**;

das

das Zeichen der Addition ist (+), und wird mit plus oder mit und ausgesprochen.

b. Subtrahiren, oder eine Größe von einer andern abziehen, heißt ihren Unterschied, d. i. eine Größe finden, die zur ersten addirt, die zweyte giebt; man heißt jene Größe, die man abzieht, den Subtrahend, von der man abzieht, den Minuend, und die man sucht, den Rest; das Zeichen der Subtraction ist (—), und wird durch durch Minus gelesen.

c. Werden mehrere Größen, zwischen welchen sich das Zeichen + oder — befindet, als eine betrachtet, so schließt man solche in Klammern ein, z. B. (a + b); (a — b); (a — 2b + d) u. s. f.

I. Zusatz:

Durch die Addition werden mehrere Größen als Theile zu einem Ganzen verbunden, und durch die Subtraction, das Ganze in seine Theile wieder aufgelöset, d. i. Addition und Subtraction dienen einander wechselseitig zur Probe; wenn man zur Differenz den Subtrahend addirt, so bekömt man den Minuend zur Summe, und wenn man bey einer gefundenen Summe einen Summanden abzieht, so bekömt man die übrigen zum Reste.

II. Zusatz:

Nur gleichartige Größen geben in der Summe ein Ganzes, das ist, nur sie können eigentlich zusammengezählt, mithin addirt und voneinander subtrahirt werden.

III. Zusatz.

III. Zusatz:

Einer Größe wird ein Ganzes, oder die Summe mehrerer Größen addirt, oder davon subtrahirt, wenn man das Ganze auf einmal, oder alle Theile einzeln in beliebiger Ordnung nacheinander addirt oder subtrahirt, das ist: $a+(b+c)=a+b+c=a+c+b$

Eben so $a-(b+c)=a-b-c=a-c-b$

§. 30.

Anwendung des allgemeinen 9ten Grundsatzes §. 19. auf die Addition und Subtraction, oder Grundsätze der Addition und Subtraction:

1. Gleiches zu Gleichen addirt, von Gleichen subtrahirt, giebt gleiche Summen, und gleiche Reste, d. i. wenn $a=b$, $c=d$, so ist $a+c=b+d$; und $a-c=b-d$

2. Zu Gleichen Ungleiches, oder zu Ungleichen Gleiches addirt, giebt Ungleiches, und zwar wo das Größere hinzukömt, ist die Summe größer, und beym Kleinern ist auch die Summe kleiner; oder:

wenn $a=a$	Eben so $b>c$
$b>c$	$a=d$
so ist $a+b>a+c$	$a+b>c+d$

3. Wenn man dem Größern mehr als dem kleinern addirt, ist erstere Summe größer als letztere, oder wenn $a>b$; $c>d$ so ist $a+c>b+d$

4. Zieht man von Gleichen Ungleiches ab, so giebt der größere Subtrahend den kleinern Rest; und wenn man

man von Ungleichen Gleiches subtrahirt, so bleibt vom grössern Minuend der grössere Rest, oder

wenn		eben so	
$a = a$		$b > c$	
$b > c$		$a = a$	
so ist $a - b < a - c$		$b - a > c - a$	

3. Zieht man vom Grössern weniger, als vom Kleinern ab, so ist ersterer Rest grösser, oder
wenn $a > b$; $c < d$; so ist $a - c > b - d$

§. 31.

Aufgabe:

Mehrere gegebene ganze Zahlen zu addiren.
Z. B. $9462 + 5327 + 420$

Auflösung:

1. Man schreibe die gegebenen Zahlen so untereinander, daß die Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. f. zu stehen kommen (Aus §. 24. kommen alle Ziffer an ihre gehörige Stellen für sich schon, wenn man nur Einer unter Einer setzet), und ziehe unten einen Strich.

2. Nun addire man die Einer zusammen, und setze ihre Summe, wenn sie kleiner als 10, darunter, ist sie aber 10 und darüber, so schreibe man nur das letzte Ziffer derselben unter die Einer, und

3. Behalte das höhere Ziffer als einen Zehner, und addire solches zu den folgenden Zehnern, deren Summe man wie bey den Einern findet.

4. Auf die nämliche Art verfahre man an allen folgenden Stellen. z. B.

4 9 6 8
5 3 2 7
4 2 9

Summe = 1 0 7 0 9

Beweis:

Letztere Zahl, die man auf die vorgeschriebene Art erhält, besteht aus allen Einern, Zehnern u. s. f. der gegebenen Summanden, ist also denselben zusammengenommen gleich, folglich (§. 29.) die verlangte Summe.

§. 32.

Aufgabe:

Zwey Zahlen voneinander zu subtrahiren z. B.

2 0 0 6 4 7 9 — 4 8 3 8 6 9

Auflösung:

1. Man setze den Subtrahend dergestalt unter den Minuend, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen, und ziehe unten einen Strich.

2. Nun subtrahire man die Einheiten, d. i. bestimme wie viel Einheiten dem Subtrahend addirt werden müssen, damit er eben so viel als der Minuend hat, und setze diese Zahl, oder den Rest darunter.

3. Eben so verfahre man an allen folgenden Stellen bey den Zehnern, Hunderten u. s. w.

4. Ist

4. Iſt an einer Stelle das Ziffer im Subtrahend gröſſer als im Minuend, ſo borge man im letztern von der nächſten höhern Ziffer 1, welches (§. 24.) in der gegebenen nächſtniedern Stelle 10 gilt, und folglich die ſchon vorhandenen Einheiten um 10 vermehrt; bemerke aber bey dem vorhergehenden Ziffer die Wegnahme durch ein oben beygeſetztes Strichgen, und ziehe nun das Ziffer des Subtrahends von dieſer neuen Summe ab.

5. Stünde an einer Stelle des Minuendus 0, ſo verfährt man eben ſo, und im Falle, daß das folgende Ziffer deſſelben wieder 0 ſeyn würde, ſo borgt man vom nächſtdarauffolgenden 1, dieſes nun gilt in der nächſtniederen Stelle 10, und 1 weggenommen läßt 9, hingegen gilt wieder dieſe weggenommene Einheit am folgenden Platz 10, und man kann alſo an allen dieſen Stellen wie oben N. 2. ſubtrahiren. z. B.

2′ 0′ 0 6′ 4 7 9
4 8 3 8 6 9

Reſt = 1 5 2 2 6 1 0

Beweis:

Letztere gefundene Zahl giebt den Reſt bey den Einheiten, Zehnern u. ſ. w., mithin bey allen Theilen an, wie viel dem Subtrahend addirt werden muß, um die über ihm ſtehende Theile des Minuends zu erzeugen, mithin iſt ſie der geſuchte Unterſchied (§. 29.) den beyden gegebenen Zahlen.

Zuſatz.

Zusatz:

Besteht der Minuend oder der Subtrahend oder beyde aus mehreren Zahlen, so zieht man von der Summe des erstern, die Summe der letztern Zahlen ab. z. B. $(14 + 6) - (12 + 3) = 20 - 15 = 5$

§. 33.

Lehrsatz:

Der Differenz zweyer Grösen wird eine andere Grösse addirt, wenn man letztere entweder dem Minuend addirt, oder vom Subtrahend abzieht. d. i. $(a-b) + d = (a + d) - b = a - (b - d)$ oder $(16 - 5) + 4 = 20 - 5 = 16 - 1 = 11 + 4 = 15$

Beweis:

Der Rest wird allemal um so viel grösser, als man den Minuend vermehrt, oder wenn der Minuend unverändert bleibt, als man den Subtrahend vermindert.

§. 34.

Lehrsatz:

Von der Differenz zweyer Grösen wird eine andere abgezogen, wenn man letztere vom Minuend abzieht, oder dem Subtrahend addirt d. i.

$(a-b)-d=(a-d)-b=a-(b+d)$

$(16-5)-4=12-5=16-9=11-4=7$

Beweis:

Beweis:

Die Differenz wird um so viel vermindert, als man vom Minuend wegnimmt, oder um was man den Subtrahend vergrößert.

§. 35.

Erklärungen:

a. Größen, die bey ihrer Verbindung einander vermehren, sind übereinstimmig; die aber

b. bey ihrer Vereinigung einander so vermindern, daß die kleinere verschwindet, und von der größern nur so viel übrig bleibt, als ihr Ueberschuß beträgt, sind entgegengesetzte Größen, z. B. Schulden und Vermögen; Vor- und Rückwärtsgehen, Steigen und Fallen.

I. Zusatz:

Entgegengesetzte Größen müssen an sich und außer ihrer Entgegensetzung betrachtet, gleichartige Größen seyn; z. B. Schulden und Vermögen beziehen sich beyde auf eine Summe Geldes; Vor- und Rückwärtsgehen auf eine bestimmte Größe der Bewegung u. s. f. zu nähern Entwicklung will ich indessen eine Größe mit A, und ihr gleiches Gegentheil mit nA ausdrücken.

II. Zusatz:

Gleiche entgegengesetzte Größen heben sich einander auf, d. i.

$$A + nA = 0, \text{ oder}$$

10 fl. Vermögen + 10 fl. Schulden = 0 Vermögen = 0 Schulden.

III. Zusatz:

Entgegengesetzte Größen addiren ist eben so viel, als eine der kleineren gleiche, mit der größern übereinstimmige Größe von letzterer subtrahiren, d. i.

$$6\,A + 2\,nA = 6\,A - 2\,A = 4\,A$$

6 fl. Vermögen + 2 fl. Schulden = 6 fl. Vermögen — 2 fl. Vermögen.

Denn $6\,A = 6\,A + 2\,A - 2A$

$$2\,nA = 2\,nA$$

mithin $6\,A + 2\,nA = 6\,A - 2\,A$, und

IV. Zusatz:

Umgekehrt von einer Größe eine andere kleinere subtrahiren, ist eben so viel, als ersterer das gleiche Gegentheil der letztern addiren, d. i.

$$6\,A - 2\,A = 6\,A + 2\,nA$$

6 fl. Vermögen — 2 fl. Vermögen = 6 fl. Vermögen + 2 fl. Schulden.

V. Zusatz:

Von einer Größe eine ihr entgegengesetzte subtrahiren, ist eben so viel, als eine der letzten gleiche mit der ersten einstimmige Größe addiren, oder

$$6\,A - 2\,nA = 6\,A + 2\,A$$

6 fl. Vermögen — 2 fl. Schulden = 6 fl. Vermögen + 2 fl. Vermögen.

Denn $6\,A = 6\,A + 2\,nA + 2\,A$ (II. Zusatz.) nimmt man also $2\,nA$ weg, so bleibt als Rest $6\,A + 2\,A$, und

VI. Zusatz:

VI. Zusatz:

Umgekehrt zu einer Größe eine andere addiren, ist eben so viel, als von ersterer das gleiche Gegentheil der letztern subtrahiren, d. i.

$$6\,A + 2\,A = 6\,A - 2\,nA$$

6 fl. Vermögen + 2 fl. Vermögen = 6 fl. Vermögen — 2 fl. Schulden.

VII. Zusatz:

Von zwey entgegengesetzten Größen kann man (III — VI Zusatz.) die eine als die zu addirende, die andere als die zu subtrahirende betrachten, mithin die erste positiv nennen, und durch das Additions-Zeichen (+) darstellen; und letztere negativ heißen, und ihr das Subtractionszeichen (—) vorsetzen.

VIII. Zusatz:

Gleichartige Größen, wovon einer das Zeichen (+) der andern das Zeichen (—) vorangesetzt ist, stehen in einem Verhältnisse wie entgegengesetzte Größen, und können als solche behandelt werden. Bey positiven Größen, wenn sie im Anfange stehen, wird gewöhnlich das Zeichen (+) weggelassen.

§. 36.

Lehrsatz:

Gleichartige Größen, wenn sie einerley Zeichen haben, werden addirt, wenn man sie zusamen zählet, d. i. ihre Coefficienten addirt, und der Summe das nämliche Zeichen giebt. z. B.

$$+4\,a + 2\,a = +6\,a$$
$$-4\,a - 2\,a = -6\,a$$

Be-

Beweis:

Die Größen sind sowohl im ersten, als im zweyten Falle unter sich einstimmig, machen also allemal als Theile ein Ganzes von der nemlichen Beschaffenheit aus, oder das Ganze bekömt allemal das Zeichen seiner Theile.

§. 37.

Lehrsatz:

Gleichartige Größen mit verschiedenen Zeichen werden addirt, wenn man die kleinere von der größern abzieht, und dem Reste das Zeichen der größern giebt. oder

$$+5a-2a=+3a$$
$$-5a+2a=-3a$$

Beweis:

In beyden Fällen sind die Summanden entgegengesetzte Größen (§. 35. VIII Zusatz), mithin muß die kleinere von der größern subtrahirt werden (§. 35. III Zusatz), wo offenbar dem Reste das Zeichen des Minuends zukömt.

Zusatz:

Ungleichartige Größen können nicht zu einem Ganzen verbunden oder zusammengezählet werden, man setzt sie also mit ihrem Zeichen unverändert hin. d. i. $5c-3d-6e=5c-3d-6e$

§. 38.

§. 38.

Lehrſatz:

Größen werden von einander ſubtrahirt, wenn man im Subtrahend das Zeichen ändert, und die Größen addiret. d. i.

$$\begin{array}{r} +5d-2a-5c \\ +2d+3a-2c \\ \hline -\quad -\quad + \\ \hline \text{Reſt} = +3d-5a-3c \end{array}$$

Beweis:

Wenn man im Subtrahend die Zeichen ändert, ſo werden die Größen deſſelben in ihre entgegengeſetzte verwandelt, (§. 35. VIII Zuſatz) und durch ihre Addition ſie ſelbſt ſubtrahirt (§. 35. III Zuſatz).

§. 39.

Aufgabe:

Zuſammengeſetzte Größen mit verſchiedenen Zeichen zu addiren.

Auflöſung:

1. Man ſchreibe die Größen ſo an, daß die gleichartigen unter einander zu ſtehen kommen, und ziehe einen Strich.

2. Gleichartige Größen mit einerley Zeichen addire man nach (§. 36.), mit verſchiedenen Zeichen nach. (§. 37.)

3. Bey ungleichartigen verfahre man nach (§. 37 Zuf.)
z. B. $5a - 3b - 4ab + 2d + e$
$2a - 2b + 6ab - 5d - f$

Summe $= 7a - 5b + 2ab - 3d + e - f$

§. 40.

Aufgabe:
Zusammengesetzte Größen mit verschiedenen Zeichen von einander zu subtrahiren.

Auflösung:

1. Man schreibe den Subtrahend so unter den Minuend, daß gleichartige Größen unter einander zu stehen kommen,

2. ändere im Subtrahend alle Zeichen und addire (§. 38). z. B.

$2a + 5b - 3d + e$
$a - 2b + 2d - f$
$- + - +$

Rest $= a + 7b - 5d + e + f$

§. 41.

Erklärung:
Eine Zahl, die mit einer gegebenen Zahl zusammengenommen die nächsthöhere Einheit (§. 24.), das ist, eine Zahl erzeugt, die zum höchsten Ziffer 1, und nachher so viele 0, als die gegebene Zahl Ziffern enthält, heißt die decadische Ergänzung, oder das arithmetische Complement der gegebenen Zahl. Der Kürze wegen drücke man die gegebene Zahl

mit

mit N, die Einheit der nächsthöhern Ordnung mit U, die dekadische Ergänzung mit C aus. z. B. So ist für N = 64, die dekadische Ergänzung C = 36 denn 64 + 36 = 100 = U; eben so ist für N = 384, C = 616; weil 384 + 616 = 1000 = U ist.

Zusatz:

Man findet zu einer gegebenen Zahl ihre dekadische Ergänzung, wenn man erstere von ihrer nächst höhern Einheit subtrahiret,

denn N + C = U
N = N

C = U — N (§. 30. N. 1)

Anmerkung:

Man kann allemal die dekadische Ergänzung einer gegebenen Zahl sehr leicht finden, ohne daß man nöthig hat, die nächsthöhere Einheit anzuschreiben; denn da letztere nach 1 lauter 0 hat, so darf man nur das niedrigste Ziffer der gegebenen Zahl von 10, alle übrige immer von 9 abziehen. z. B. Man sucht zur Zahl 4 6 2 5 ihre Ergänzung; so giebt 5 von 10 zum Rest 5; 2 von 9 läßt 7, 6 von 9 giebt 3, und 4 von 9 bleibt 5 zum Reste, mithin C = 5375, wo offenbar 4 6 2 5 + 5 3 7 5 = 1 0 0 0 0.

§. 42.

Lehrsatz:

Von einer Zahl A wird eine andere N subtrahirt, wenn man die dekadische Ergänzung C von N der Zahl A

 addirt,

addiret, und von der Summe die nächsthöhere Einheit U subtrahiret. d. i. $A - N = (A + C) - U$

Beweis:

$N + C = U$ ferner $A = A$

$C = C$ $N = U - C$

$-\quad -\quad +$

$N = U - C$ (§. 30 N. 1.). $A - N = A - U + C =$
$(A + C) - U$

Beyspiel: Man soll von 5 6 4 5 die Zahl 3 4 9 4 abziehen:

$A = 5\,6\,4\,5$

$C = 6\,5\,0\,6$

$A + C = 1\,2\,1\,5\,1$

$U = 1\,0\,0\,0\,0$

$A + C - U = 2\,1\,5\,1 = A - N$

Anmerkung: Bey Rechnungen mit Logarithmen gewährt letztere Methode vermittels der Addition der dekadischen Ergänzung Zahlen zu subtrahiren viele Bequemlichkeit, deßhalb habe ich die Theorie davon hier vorgetragen.

III. Abschnitt.

Von der Multiplication und Division ganzer Zahlen und Größen.

§. 43.

Erklärungen:

a Multipliciren heißt eine Größe A so und so oft nehmen, als es eine gegebene Zahl m angiebt; die gege-

gegebene Größe A, und die Zahl m nennet man die Factoren, und zwar den Factor A den Multiplicand, den andern Factor m den Multiplicator, und die durch die Multiplication erzeugte Größe P das Product. Das Zeichen der Multiplication ist (×) oder (.) welches man zwischen die Factoren setzt. Z. B. $4 \times 3 = 12$.

b. Eine Größe A durch eine Zahl m dividiren heißt A so und in so viele gleiche Theile theilen, als m angiebt, mithin einen solchen Theil, oder solche Größe Q finden, die mit m multiplicirt die Größe A wieder giebt. Man nennet die Größe A den Dividend, die Zahl m den Divisor, die gefundene Größe Q den Quotienten. Das Zeichen der Division ist (:), welches zwischen dem Dividend, und dem Divisor gesetzt wird. Z. B. $12 : 3 = 4$.

I. Zusatz: Mit einer ganzen Zahl multipliciren, heißt den Multiplicand so oft zu sich addiren, als der Multiplicator Einheiten enthält.

II. Zusatz: In der Buchstabenrechnung werden im Producte die Factoren ohne Zeichen zusammengesetzt, d. i. $a \times b = ab$.

III. Zusatz: Jede Größe mit 1 multiplicirt, oder dividirt, giebt die unveränderte Größe zum Product, und Quotienten; d. i. $a \times 1 = a$; und $a : 1 = a$

IV. Zusatz: Wenn der Dividend und der Divisor gleich sind, so ist der Quotient 1, d. i. $a : a = 1$

V. Zusatz: Eine Größe mit der nemlichen Zahl multiplicirt und dividirt bleibt unverändert; oder $a \times m : m = a$.

§. 44.

Anwendung des allgemeinen Grundsatzes (§. 19 N. 9.) auf die Multiplication und Division: oder Grundsätze der Multiplication und Division:

1. Gleiches mit Gleichem multiplicirt, oder dividirt, giebt gleiche Producte, und Quotienten, d. i.

wenn $a = b$	Und wenn $a = b$
$c = d$	$c = d$
so ist $a\,c = b\,d$.	so ist wieder $a : c = b : d$

2. Gleiches mit Ungleichem, oder Ungleiches mit Gleichem multiplicirt, oder dividirt, giebt ungleiche Producte und Quotienten.

3. Bey gleichen Multiplicanden giebt der grösere Multiplicator, und bey gleichen Multiplicatoren der grösere Multiplicand das grösere Product; oder

wenn $A = A$	Und $A > B$
$n > m$	$n = m$
so ist $n\,A > m\,A$;	so ist $n\,A > m\,B$

4. Bey gleichen Dividenden giebt der kleinere Divisor, und bey gleichen Divisoren der grösere Dividend den grösern Quotienten, oder

wenn $A = B$	Und $A > B$
$m < n$	$m = n$
so ist $A : m > B : n$	$A : m > B : n$

5. Der gröſsere Multiplicand mit dem gröſsern Multiplicator giebt das gröſsere Product, und der gröſsere Dividend mit dem kleinern Divisor den gröſsern Quotienten oder

wenn $A > B$ und $n > m$, so ist $n\,A > m\,B$

Und $A > B$ und $m < n$, $A : m > B : n$

§. 45.

Lehrsatz:

Bey der Multiplication ganzer Zahlen ist der eine Factor so oft im Producte enthalten, als die Einheit im andern Factor.

Beweis:

Der eine Factor z. B. 4 läſst sich durch * * * *, der andere z. B. 3 durch * * * mithin das ganze Product durch * * * * (§. 43. I. Zus.) anschaulich darstellen;

* * * *
* * * *

nun kommt offenbar der eine Factor 4, oder die horizontale Reihe so oft vor, als der andere Factor 3 Einheiten hat; und umgekehrt: die vertikale Reihe, oder der Factor 3 steht so oft im Producte da, als der andere Factor 4 Einheiten, oder die horizontale Reihe Sternchen enthält.

I. Zusatz: Bey ganzen Zahlen geben Factoren mit veränderter Ordnung einerley Product; und wenn letzteres durch den einen Factor dividirt wird, so erhält man den andern Factor zum Quotienten.

II. Zusatz: Bey der Division ganzer Zahlen giebt der Dividend durch den Quotienten dividirt, den vorigen

Divi-

Divisor zum Quotienten, d. i. $x : 3 = 4$; und $12 : 4 = 3$.

III. Zusatz: Bey ganzen Zahlen dienen die Division und Multiplication einander wechselseitig zur Probe.

§. 46.

Lehrsatz:

Die Summe zweyer oder mehrerer Größen wird durch eine Zahl multiplicirt, oder dividirt, wenn man jede einzelne Größe multiplicirt, oder dividirt, und am Ende die einzelnen Producte oder Quotienten addirt. d. i.

$(a + b) \times n = n\,a + n\,b$; und $(a + b) : n = a : n + b : n$.

Beweis:

Offenbar wird das Ganze multiplicirt, und im zweyten Falle dividirt, wenn man jeden einzelnen Theil mit der gegebenen Zahl n multiplicirt oder dividirt. (§. 29. 2.)

§. 47.

Lehrsatz:

Eine Größe wird mit der Summe zweyer oder mehreren Zahlen multiplicirt, wenn man sie mit jeder einzelnen Zahl multiplicirt, und am Ende die Producte addirt; oder:

$a \times (m + n) = m\,a + n\,a$

Beweis:

Beweis:

Man multiplicirt die Größe offenbar mit dem ganzen Multiplicator, wenn man sie mit jedem einzelnen Theile desselben multiplicirt.

§. 48.

Lehrsatz:

Die Differenz zweyer Größen wird durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, wenn man jede einzelne Größe damit multiplicirt oder dividirt, und am Ende die Producte subtrahirt; oder:

I $(a - b) \times n = n\,a - n\,b$; und

II $(a - b) : n = a : n - b : n$

Beweis:

Von I. Man setze $a - b = d$; so ist $a = b + d$ (§. 29. I. Zus.), ferner $n\,a = n\,b + n\,d$ (§. 43. u. 46.) mithin $n\,a - n\,b = n\,d = n\,(a - b)$

Beweis:

Von II. $(a : n - b : n) \times n = a - b$ (43. b. und V. Zus.)

§. 49.

Lehrsatz:

Eine Größe wird mit der Differenz zweyer Zahlen multiplicirt, wenn man sie mit beyden multiplicirt, und die Producte subtrahirt; oder

$a \times (m - n) = m\,a - n\,a$

Beweis:

Beweis:

Man ſetze wieder $m - n = d$; ſo iſt $m = d + n$ und $a \times m = a \times (d + n) = a \times d + a \times n$ (§. 47.) folglich $a \times m - a \times n = a \times d$; oder $ma - na = a \times (m - n)$

§. 50.

Lehrſatz:

Ein Quotient wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man mit ihr entweder den Dividend multiplicirt, oder den Diviſor dividirt; und der Quotient wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man mit ſolcher entweder den Dividend dividirt, oder den Diviſor multiplicirt, d. i.

I. $(a : b) \times n = na : b = a : (b : n)$
II. $(a : b) : n = (a : n) : b = a : (b \times n)$

Beweis von I. Wenn man den Dividend a, oder das Ganze, n mal ſo groß nimmt, und eben ſo viele Theile macht, als vorher, ſo muß offenbar jeder Theil, oder der Quotient, n mal größer werden; und wenn man den Dividend a, oder das Ganze, unverändert läßt, ſolches aber in n mal weniger Theile zerfällt als vorher, ſo muß wieder jeder Theil, oder der Quotient, n mal größer werden.

Beweis von II. Wenn man den Dividend mit n dividirt, ſo wird das Ganze n mal kleiner, multiplicirt man aber den Diviſor, ſo wird die Anzahl der Theile n mal größer, mithin allemal ein Theil oder der Quotient, n mal kleiner.

Zuſatz:

Zusatz:

Der Quotient bleibt unverändert, wenn man den Dividend sowohl, als den Divisor zugleich mit der nemlichen Zahl multiplicirt, oder dividirt, d. i.

$a : b = m\,a : m\,b = (a : n) : (b : n)$

§ 51.

Lehrsatz:

Ein Product zweyer ganzen Zahlen wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man einen der Factoren damit wirklich multiplicirt, und den andern unverändert beysetzt, oder wie man sich der Kürze wegen ausdrückt, wenn man nur einen Factor multiplicirt, d. i.

$(4 \times 3) \times 2 = 8 \times 3 = 4 \times 6$

Beweis:

$4 \times 3 = 4 + 4 + 4$ (§. 43. I. Zus.)
$2 = 2$

$(4 \times 3) \times 2 = 8 + 8 + 8$ (§. 44. N. 1)
$= 8 \times 3$

Eben so ist: $4 \times 3 = 3 \times 4$ (§. 45. I. Zus.)
also $4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$
$2 = 2$

mithin $(4 \times 3) \times 2 = 6 + 6 + 6 + 6$
$= 6 \times 4 = 4 \times 6$

I. Zusatz: Eine ganze Zahl wird mit dem Producte zweyer ganzer Zahlen multiplicirt, wenn man nur mit einem Factor multiplicirt, und den andern beysetzt.

ſetzt. d. i. $2 \times (4 \times 3) = 8 \times 3 = 4 \times 6$
denn $2 \times (4 \times 3) = (4 \times 3) \times 2 = 8 \times 3 = 4 \times 6$

II. Zuſatz: Ein Product zweyer ganzen Zahlen wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man einen Factor dividirt, und den andern dem Quotienten beyſetzet d. i. $(8 \times 6) : 2 = 4 \times 6 = 8 \times 3$
Denn $(4 \times 6) \times 2 = 8 \times 6$; und eben ſo $(8 \times 3) \times 2 = 8 \times 6$ (§. 43. b.)

III. Zuſatz: Eine ganze Zahl wird durch das Product zweyer ganzen Zahlen dividirt, wenn man mit einem Factor dividirt, und den andern dem Quotienten als Diviſor beyfüget; oder $24 : (4 \times 3) = 6 : 3 = 8 : 4$
Denn wird 24 nur mit dem erſten Factor 4 dividirt, ſo iſt der Quotient 6 offenbar dreymal zu groß, und dividirt man nur mit dem zweyten Factor 3, ſo iſt der Quotient 8 viermal zu groß; man erhält daher den wahren Quotienten, wenn man im erſten Falle noch 6 mit 3, und im zweyten 8 mit 4 dividirt.

IV. Zuſatz: Eine ganze Zahl wird mit 10, 100 u. ſ.w. multiplicirt, wenn man dem Multiplicand ſo viele Nullen anhängt, als der Multiplicator hat; oder: $24 \times 10 = 240$; $24 \times 100 = 2400$;
denn der Multiplicand wird durch Anhängung einer Nulle 10 mal, durch zwey Nullen 100 mal größer u. ſ. f. (§. 24. und §. 43. I. Zuſ.)

V. Zuſatz: Wenn einer oder beyde Factoren Nullen nach ſich haben, ſo beſteht das Product aus dem Producte der Zahlziffern mit ſo vielen angehängten Nullen, als beyde Factoren miteinander haben; oder

4×30

$4 \times 30 = 120$; $400 \times 30 = 12000$;
denn $4 \times 30 = 4 \times (3 \times 10) = 12 \times 10 = 120$
Und $400 \times 30 = (4 \times 100)(3 \times 10) = 12 \times 1000 = 12000$

§. 52.

Aufgabe:

Das Einmaleins, oder eine Tafel zu verfertigen, die alle Producte der ersten 9 Zahlen enthält.

Auflösung:

Man schreibe in einer horizontalen Reihe die ersten 9 Zahlen, unter solche setze man die Summe jeder Zahl zu sich selbst, so hat man das Duplum, zu jedem Duplo addire man wieder die ersten 9 Zahlen, so bekömt man ihr dreyfaches u. s. f.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Anmerk. In der Ausübung dient, um Producte größerer einfacher Factoren als 5 zu finden, folgende mechanische Methode; man schliesse die Finger an beyden Händen, und öffne erstlich in der einen Hand so viele Finger, als der eine Factor über 5 ist, z. B. bey 8

öffne

öffne man drey Finger; eben so öffne man in der andern Hand so viele Finger, als der andere Factor mehr Einheiten, als die Zahl 5 hat; z. B. bey 7 öffne man zwey Finger; nun zähle man an beyden Händen die stehenden Finger als Zehner, und addire als Einer das Product der liegenden Finger hinzu. Im gegebenen Beyspiele stehen in der einen Hand 3, in der andern 2 Finger aufrecht, dieses macht 50, ferner sind in der einen Hand noch 2, in der andern aber 3 Finger geschlossen, mithin $2 \times 3 = 6$; folglich beträgt das ganze Product $8 \times 7 = 56$. Durch practische Uebung kann man sich hierinn bald eine Fertigkeit erwerben.

Nachstehenden Beweis erfand Herr Joseph Heigl, einer meiner vorzüglichsten Zuhörer.

Man bezeichne die Anzahl der in einer Hand aufrechtstehenden Finger mit m, und jene in der andern Hand mit n, so drücken $5 - m$, und $5 - n$ die Anzahl der liegenden Finger, so wie $5 + m$, und $5 + n$ die beyden Factoren aus.

Nun ist $(m + n)\,10 + (5 - m)(5 - n) = 10m + 10n + 25 - 5m - 5n + mn$

$= 25 + 5m + 5n + mn$

$= (5 + m)(5 + n)$; das ist,

Nimmt man die aufrechtstehenden Finger als Zehner, und addiret dazu das Product der liegenden Finger als Einheiten, so erhält man das verlangte Product von beyden Factoren, deren jeder größer als 5 ist.

§. 53.

§. 53.

Aufgabe:

Eine ganze Zahl von mehreren Ziffern mit einer andern von einem Ziffer zu multiplicirem.

Auflösung:

1. Man setze das Ziffer des Multiplicators unter das niedrigste Ziffer des Multiplicands, und ziehe einen Strich,

2. suche aus der Tabelle (§. 52.) das Product des über ihr stehenden niedrigsten Ziffers, so ist des Productes niedrigstes Ziffer ein Einer, man setze solchen darunter;

3. Besteht das gefundene Product aus zweyen Ziffern, so behalte man das höhere Ziffer als einen Zehner im Gedächtnisse,

4. suche wieder das Product des Multiplicators und des nächstfolgenden Ziffers oder Zehners, so ist das niedrigste Ziffer davon ein Zehner (§. 51. V. Zus.) zu diesem Producte addire man den Zehner des vorigen Productes, und setze das niedrigste Ziffer davon zur linken Seite des vorigen Nr. 2.

5. das höhere Ziffer davon behalte man wieder als einen Hunderter für das folgende Product;

6. Auf die nämliche Art verfahre man bey allen folgenden Ziffern des Multiplicands. z. B.

3 2 4 7 8
4

Product = 1 2 9 9 1 2

Beweis:

Beweis:

Man hat alle Theile des Multiplicands so vielmal zu sich addirt, als der Multiplicator Einheiten enthält, folglich ist die gefundene Zahl das gesuchte Product. (§. 43. I. Zus. und §. 46.)

§. 54.

Aufgabe:

Zwey ganze Zahlen miteinander zu multipliciren, wenn sie beyde aus mehrern Ziffern bestehen.

Auflösung:

1. Man setze unter die eine Zahl die andere so, daß die Einer unter Einer zu stehen kommen, und ziehe einen Strich,

2. multiplicire mit dem niedrigsten Ziffer der letztern Zahl nach (§. 53.) die ganze oder ihr stehende Zahl oder den Multiplicand,

3. verfahre eben so bey dem nächsthöhern Ziffer des Multiplicators, rücke aber das Product um eine Stelle weiter zur linken, so daß das niedrigste Ziffer desselben an dem Platze der Zehner zu stehen kömt (§. 51. V. Zus.)

4. Suche auf die nämliche Art die Producte der noch folgenden höhern Ziffern des Multiplicators, und rücke immer das folgende um eine Stelle weiter zur Linken, als die vorhergehende, weil der Multiplicator an jeder Stelle um das Zehnfache am Localwerthe zunimmt (§. 24.)

5. Addire endlich alle gefundene Partialproducte, so ist die Summe derselben das gesuchte Product der gegebenen Zahlen. z. B.

3624
236
21744
10872
7248
Product = 855264

Beweis:

Jedes gefundene Partialproduct Nr. 2. 3. 4. ist ein Product eines Theils des Multiplicators in alle Theile des Multiplicands, oder den ganzen Multiplicand, da man nun mit allen Ziffern des Multiplicators so verfährt, so ist die Summe aller dieser Producte das Product des ganzen Multiplicators in den ganzen Multiplicand (§. 46. u. 47.)

§. 55.

Aufgabe:

Eine ganze Zahl durch eine andere zu dividiren, wenn letztere nur aus einem Ziffer besteht.

Auflösung:

1. Man setze die zweyte Zahl als Divisor unter das höchste Ziffer der erstern, oder, im Falle das Ziffer des Divisors größer als das höchste des Dividends

seyn sollte, unter das nächstfolgende; ziehe zur Rechten beyder Zahlen einen senkrechten Strich.

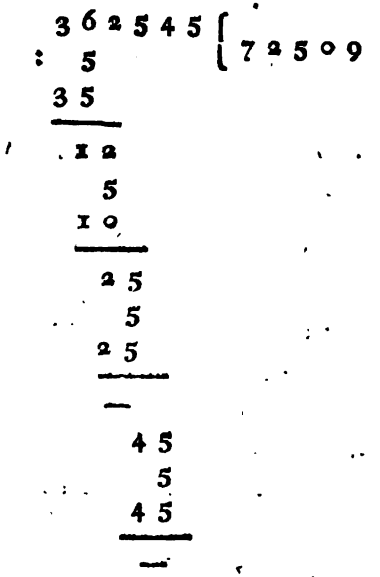
2. Nehme aus der Tabelle (§. 52.) in der ersten verticalen Reihe den Divisor, und suche in der treffenden horizontalen Spalte jenes Product, welches den ersten Ziffern des Dividends gleich, oder zunächst kleiner ist, so steht darüber in der obersten horizontalen Spalte das entsprechende Ziffer des Quotienten,

3. diesen Quotienten setze man zunächst an den gezogenen Verticalstrich, und das gefundene Product unter den Divisor, ziehe wieder einen horizontalen Strich, und subtrahire dieses Product von den ersten Ziffern des Dividends;

4. setze den treffenden Rest unter den Strich, und füge ihm das folgende Ziffer im Dividend bey, schreibe wieder den Divisor darunter, und verfahre auf's neue nach Nr. 2.; den gefundenen Quotienten aber gebe man zur Rechten des vorigen seine Stelle,

5. und widerhole dieses Verfahren so lange, bis alle Ziffern des Dividendus erschöpft sind.

6. Trifft es an einer Stelle zu, daß kein Rest bleibt, und das folgende Ziffer im Dividend kleiner als der Divisor ist, so schreibe man an die treffende Stelle des Quotienten Null, und füge dem vorigen noch das darauf folgende Ziffer des Dividends bey, und setze die Division wieder fort. z. B.



Beweis:

Durch das Verfahren Nr. 2. u. 3. wird eigentlich der Quotient in so ferne bestimmet, in wie ferne der Dividend nur aus einem, oder zwey Ziffern bestünde, mithin ist der gefundene Quotient so oft zehnmal kleiner als der wahre, so viele Ziffer im Dividend nach den obigen folgen; das ist: dem gefundenen Quotienten sollten so viele Nullen beygefüget werden, als im Dividend Ziffern nachstehen: da man aber Nr. 4. — 6. für alle diese Ziffern eben so viele in den Quotienten setzet, und ihnen immer ihre Stellen zur Rechten giebt, so erhält dadurch das zuerst gefundene Ziffer des Quotienten sowohl, als

alle übrige ihren treffenden Localwerth; mithin sind diese einzelne Quotienten die wahren Partialquotienten aller Theile des Dividends, folglich ist ihre Summe der wahre Quotient für den ganzen Dividend (§. 46.)

§. 56.

Aufgabe:

Eine ganze Zahl mit einer andern kleinern Zahl, die beyde aus mehreren Ziffern bestehen, zu dividiren.

Auflösung:

1. Man verfahrt wie bey der vorigen Aufgabe (§. 55.) nur kann man den treffenden Quotienten nicht aus der Tabelle nehmen;

2. man muß also sich etwa auf einer eigenen Tabelle vorher alle Producte des gegebenen Divisors mit den ersten 9 Zahlen entwerfen, und daraus die treffenden Quotienten bestimmen, oder

3. man kann das erste Ziffer des Divisors zu einer Norm nehmen, und nach obiger Tabelle (§. 52.) das Ziffer im Quotienten setzen, wo aber erst das Product desselben in den ganzen Divisor entscheiden muß, ob es das richtige ist, oder aber an dessen Stelle ein anderes kleineres gesetzet werden muß, welches vorzüglich dann allemal statt hat, wenn die nach dem ersten folgenden Ziffern des Divisors große Zahlzeichen sind. z. B.

```
 2' 1' 0' 1 4 6 4 [ 4 2 3
 :  4 9 6 8
 1 9 8 7 2
 ---------------
   1' 1' 4' 2 6
      4 9 6 8
      9 9 3 6
      -------
      1 4 9 0 4
        4 9 6 8
      1 4 9 0 4
      ---------
```

Beweis:

Da man alle Theile des Dividends, durch den ganzen Divisor dividirt, so ist die Summe des Partialquotienten der gesuchte Quotient des ganzen Dividends und Divisors (§. 46.)

I. Zusatz: Wenn man dem Producte des in ganzen Zahlen gefundenen Quotienten und des Divisors den Rest, der während der Operation, oder am Ende bleibt, addirt, so giebt die Summe den Dividend; denn wenn D den jedesmaligen Dividend, d den Divisor, q den in den Zahlen bis dahin gefundenen Quotienten, und r so einen treffenden Rest bezeichnen; so ist vermög der angestellten Operation allemal

$$r = D - d\,q, \text{ mithin}$$
$$d\,q + r = D \text{ (§. 29. I. Zus.)}$$

II. Zusatz: Der bleibende Rest muß allemal kleiner als der Divisor seyn; denn $d\,q + r = D$, würde nun

$r = d$

$r = d$ seyn; so wäre $d\,q + d = D$; oder $D = d\,(q + 1)$ folglich würde $q + 1$, nicht aber q der wahre Quotient seyn, welches um so mehr gilt, wenn man $r > d$ fände.

III. Zusatz: Bleibt bey der Division ganzer Zahlen ein Rest, so giebt es keine ganze Zahl, die mit dem Divisor multiplicirt den Dividend wieder giebt. Von diesen mehr in der Lehre von Brüchen.

Anmerk. Wer Nepersche Stäbchen besitzet, kann mechanisch gegebene ganze Zahlen miteinander multipliciren und dividiren.

§. 57.

Aufgabe:

Allgemein ausgedrückte Zahlen mit einander zu multipliciren.

Auflösung:

Man multiplicire die Coefficienten miteinander, und setze die Buchstaben ohne Zeichen zusammen. z. B. $4\,a \times 3\,b = 12\,a\,b$ (§. 43. II. Zus. §. 51.).

§. 58.

Aufgabe:

Gegebene Größen in der Buchstabenrechnung zu dividiren.

Auflösung:

Man dividire ihre Coefficienten, in Rücksicht der Buchstaben streiche man gleiche Factoren im Divisor und Dividend aus, und setze den Rest unverändert in

den

den Quotienten. z. B. $6ab : 3ac = ab : c$ (§. 51. II. u. III. Zuſ.)

§. 59.

Lehrſatz:

Wenn man was immer für eine Größe mit einer poſitiven Zahl multiplicirt, ſo hat das Product mit dem Multiplicand einerley Zeichen, d. i.

$+a \times +4 = +4a$ } und alſo $+a \times +n = +na$
$-a \times +4 = -4a$ } gemein: $-a \times +n = -na$

Beweis:

Multipliciren heißt den Multiplicand ſo und ſo oft nehmen, als es der Multiplicator angiebt, (§. 43.) erſteres iſt durch das Zeichen, letzteres durch die Größe des Multiplicators beſtimmt, nun beſtimmt aber das poſitive Zeichen (+), daß man den Multiplicand als eine zuaddirende Größe nehmen, das iſt den Multiplicand ſelbſt, und zwar ſo oft nehmen ſoll, als es die Zahl 4 oder überhaupt n angiebt; das iſt

$+a \times +4 = +a+a+a+a = +4a$

$-a \times +4 = -a-a-a-a = -4a$ (§. 36.).

Und da es hier nur auf das Zeichen ankömt, auf welche die Größe des Multiplicators keinen Einfluß hat, ſo iſt überhaupt $+a \times +n = +na$; $-a \times +n = -na$.

§. 60.

Lehrſatz:

Wenn man eine Größe mit einer negativen Zahl multiplicirt, ſo bekömt das Product das entgegengeſetzte Zeichen vom Multiplicand, d. i.

$+a \times -4 = -4a$ } und als. $+a \times -n = -na$
$-a \times -4 = +4a$ } gemein: $-a \times -n = +na$

Beweis:

Mit einer negativen Zahl multipliciren (§. 43.) heißt den Multiplicand als eine zu ſubtrahirende Größe, das iſt, das Gegentheil des Multiplicandus, ſo oft nehmen, als es die Größe des Multiplicators angiebt; (§. 35. VII. u. VIII. Zuſ.)

$+a \times -4 = -a-a-a-a = -4a$
$-a \times -4 = +a+a+a+a = +4a$. (§. 36.)

Da wieder die Größe n des Multiplicators auf die Zeichenbeſtimmung keinen Einfluß hat, ſo iſt überhaupt $+a \times -n = -na$; und $-a \times -n = +na$.

Zuſatz:

Wenn bey der Multiplication die Factoren Zeichen bey ſich haben, ſo geben gleiche Zeichen der Factoren im Producte (+), ungleiche (−).

§. 61.

Lehrſatz:

Wenn man eine Größe durch eine poſitive Zahl dividirt, ſo bekömt der Quotient das Zeichen des Dividends d. i.

$+6a : +a = +3a$
$-6a : +a = -3a$ } allgemein $+a : +n = +(a:n)$, $-a : +n = -(a:n)$

Beweis:

Mit einer poſitiven Zahl eine Größe dividiren heißt dieſe Größe als eine zuaddirende Größe ſelbſt, in ſo viele gleiche Theile theilen, als obige Zahl angiebt,

ſo

so daß ein solcher gefundener Theil oder Quotient, mit der positiven Zahl multiplicirt die gegebene Größe wieder erzeugt (§. 43. b.). Nun ist aber offenbar die Hälfte von $+6a = +3a$, und von $-6a$ hingegen $= -3a$; und überhaupt von $+a$ der nte Theil $= +(a:n)$, von $-a$ hingegen $= -(a:n)$, so wie allemal der gefundene Quotient mit dem Divisor multiplicirt die gegebene Größe wieder erzeugt; denn

$+3a \times +2 = +6a$
$-3a \times +2 = -6a$
$+(a:n) \times +n = +a$
$-(a:n) \times +n = -a$ (§. 60. Zus. u. §. 43. V. Zus.);

folglich bekömt der Quotient mit dem Dividend einerley Zeichen, wenn der Divisor das Zeichen (+) hat.

§. 62.

Lehrsatz:

Wenn man eine Größe durch eine negative Zahl dividirt, so bekömt der Quotient das entgegengesetzte Zeichen vom Dividend. d. i.

$+6a:-2 = -3a$
$-6a:-2 = +3a$

allgemein $+a:-n = -(a:n)$
$-a:-n = +(a:n)$

Beweis:

Mit einer negativen Zahl eine Größe dividiren heißt sie als eine zusubtrahirende, mithin das Gegentheil derselben in so viele gleiche Theile theilen, als obige Zahl angiebt, so daß wieder so ein Theil, oder Quotient, mit der negativen Zahl multiplicirt die gegebene Größe oder Dividend erzeugt (§. 46. b.)

Nun

Nun ist aber offenbar von $+6a$ die Hälfte des Gegentheils $= -3a$, und von $-6a$ hingegen $= +3a$, und überhaupt von $+a$ der nte Theil des Gegentheiles $= -(a:n)$, von $-a$ hingegen $= +(a:n)$; so wie allemal der gefundene Quotient mit dem Divisor multiplicirt die gegebene Größe wieder erzeugt; denn aus §. 60. Zus. ist offenbar

$-3a \times -2 = +6a$

$+3a \times -2 = -6a$

$-(a:n) \times -n = +a$

$+(a:n) \times -n = -a$ (§. 43. V. Zus.); folglich bekömt der Quotient das entgegengesetzte Zeichen des Divisors, wenn letztere eine negative Zahl ist.

Zusatz:

Bey der Division geben gleiche Zeichen im Dividend und Divisor im Quotienten (+), ungleiche (—).

§. 63.

Aufgabe:

Zusammengesetzte Größen in der Buchstabenrechnung zu multipliciren.

Auflösung:

1. Man multiplicire mit jedem Theile des Multiplicators alle Theile des Multiplicands,

2. bestimme die Zeichen aus (§. 60. Zus.), und die einzelnen Producte aus (§. 57.),

3. addire die einzelnen Producte zusammen. z. B.

$$\begin{array}{r} +3a-2b \\ +4c-d \\ \hline +12ac-8bc-3ad+2bd \end{array}$$

§. 64.

Aufgabe:

Zuſammengeſetzte Größen in der Buchſtabenrechnung zu dividiren.

Auflöſung:

1. Man dividire mit dem Diviſor alle Theile des Dividends,

2. bey den einzelnen Quotienten beſtimme man die Zeichen aus (§. 62. Zuſ.), ihre Größe aus (§. 58.),

3. dieſe einzelne Quotienten addire man am Ende zuſammen. z. B.

$$15ad - 9bd + 15cd - 20ae + 12be - 20ce \;[\,:\,(5a - 3b + 5c)$$

$$15ad - 9bd + 15cd$$

$$- \quad + \quad -$$

$$-$$

$$-20ae + 12be - 20ce$$

$$(5a - 3b + 5c)$$

$$-20ae + 12be - 20ce$$

$$+ \quad - \quad +$$

$$-$$

Anmerk. Mehrere Beyſpiele zur Uebung für die Buchſtabenrechnung mit zuſammengeſetzten Größen laſſen ſich erſt nach der Lehre von Brüchen und Potenzen ſchicklich anführen.

Nun ist aber offenbar von $+6a$ die Hälfte des Gegentheils $= -3a$, und von $-6a$ hingegen $= +3a$, und überhaupt von $+a$ der nte Theil des Gegentheiles $= -(a:n)$, von $-a$ hingegen $= +(a:n)$; so wie allemal der gefundene Quotient mit dem Divisor multiplicirt die gegebene Größe wieder erzeugt; denn aus §. 60. Zus. ist offenbar

$-3a \times -2 = +6a$

$+3a \times -2 = -6a$

$-(a:n) \times -n = +a$

$+(a:n) \times -n = -a$ } (§. 43. V. Zus.); folglich bekömt der Quotient das entgegengesetzte Zeichen des Divisors, wenn letztere eine negative Zahl ist.

Zusatz:

Bey der Division geben gleiche Zeichen im Dividend und Divisor im Quotienten (+), ungleiche (—).

§. 63.

Aufgabe:

Zusammengesetzte Größen in der Buchstabenrechnung zu multipliciren.

Auflösung:

1. Man multiplicire mit jedem Theile des Multiplicators alle Theile des Multiplicands,

2. bestimme die Zeichen aus (§. 60. Zus.), und die einzelnen Producte aus (§. 57.),

3. addire die einzelnen Producte zusammen. z. B.

$$\begin{array}{r} +3a-2b \\ +4c-d \\ \hline +12ac-8bc-3ad+2bd \end{array}$$

§. 64.

Aufgabe:

Zuſammengeſetzte Größen in der Buchſtabenrechnung zu dividiren.

Auflöſung:

1. Man dividire mit dem Diviſor alle Theile des Dividends,
2. bey den einzelnen Quotienten beſtimme man die Zeichen aus (§. 62. Zuſ.), ihre Größe aus (§. 58.).
3. dieſe einzelne Quotienten addire man am Ende zuſammen. z. B.

$$15ad - 9bd + 15cd - 20ae + 12be - 20ce \;[\,:\,(5a - 3b + 5c)$$

$$15ad - 9bd + 15cd$$
$$- \quad + \quad -$$

$$-$$

$$-20ae + 12be - 20ce$$
$$(5a - 3b + 5c)$$
$$-20ae + 12be - 20ce$$
$$+ \quad - \quad +$$

$$-$$

Anmerk. Mehrere Beyſpiele zur Uebung für die Buchſtabenrechnung mit zuſammengeſetzten Größen laſſen ſich erſt nach der Lehre von Brüchen und Potenzen ſchicklich anführen.

IV. Abschnitt.

Von der Theilbarkeit ganzer Zahlen.

§. 65.

Erklärungen:

a. Wenn sich eine ganze Zahl A durch eine andre B ohne Rest theilen läßt, das ist, eine ganze Zahl n ohne Rest zum Quotienten giebt, so sagt man, A sey durch B **theilbar**; und weil $n \times B = B \times n$ (§. 45. I. Zus.) $= A$ (43.), so giebt B selbst n mal genohmen die Zahl A, das ist, B ist das **Maaß** (§. 1. d.) oder ein **aliquoter Theil** von A. z. B. da $12 : 3 = 4$, so ist die Zahl 3 das Maaß von der Zahl 12.

b. Lassen sich zwey Zahlen A und C zugleich durch die nemliche Zahl B ohne Rest theilen, so ist B das **gemeine Maaß** für A und C; z. B. 4 ist gemeine Maaß der Zahlen 8 und 12.

Zusatz:

Jede Zahl ist durch sich selbst, und durch 1 theilbar (§. 43. III. u. IV. Zus.).

§. 66.

Erklärungen:

a. Eine Zahl, die blos durch sich selbst, und durch 1 theilbar ist, heißt eine **einfache** oder eine **Primzahl** (numerus primus) z. B. die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13 u. s. f.

b. Eine

b. Eine Zahl, die durch eine oder mehrere andere theilbar ist, heißt eine zusammengesetzte Zahl (numerus compositus) z. B. die Zahlen 4, 6, 8 u. s. f.

c. Zahlen, die kein gemeines Maaß haben, nennet man relative Primzahlen, oder Primzahlen unter sich, z. B. 4, 15.

d. Zahlen, die ein gemeines Maaß haben, heißen zusammengesetzte Zahlen unter sich; z. B. 4, 6, 8 u. s. f.

I. Zusatz: Absolute, oder einfache Primzahlen, sind auch unter sich Primzahlen; aber nicht umgekehrt.

II. Zusatz: Zusammengesetzte Zahlen unter sich sind auch an sich zusammengesetzte Zahlen.

III. Zusatz: Wenn A durch B theilbar ist, so ist auch, wenn m eine ganze Zahl bezeichnet, m A durch B noch theilbar (§. 51. II. Zus.) z. B. da 8 durch 4 theilbar, so bleibt auch $3 \times 8 = 24$ durch 4 noch theilbar.

§. 67.

Lehrsatz:

Wenn zwey Zahlen A und B das gemeine Maaß m haben, so ist ihr Product durch jeden Factor noch r theilbar, wenn man aus selben m einmal wegläßt, das ist: wenn man A sowohl als B mit m dividirt, und die Quotienten P und Q mit dem Maaß m multiplicirt, so ist dieses Product m P Q durch A sowohl als B theilbar.

Beweis:

2. Ist nun aber m das Maaß von A, so muß A : m eine ganze Zahl, mithin aB : m + C : m ebenfalls eine ganze Zahl seyn.

3. Die Summe letzterer zwey Quotienten kann nur eine ganze Zahl seyn, wenn beyde Quotienten ganze Zahlen; oder beyde Brüche sind;

4. Da nun m das Maaß von B, mithin auch von aB ist (§. 66. III. Zus.); so giebt aB : m eine ganze Zahl; folglich

5. muß auch C : m eine ganze Zahl, mithin m das Maaß vom Reste C seyn.

§. 70.

Erklärung:

Eine Zahl, die zwey oder mehrere gegebene Zahlen so theilet, daß die Quotienten Primzahlen unter sich sind, heißt das größte gemeine Maaß dieser Zahlen; z. B. für 24 und 16 ist die Zahl 8 das größte gemeine Maaß, denn 24 : 8 = 3, und 16 : 8 = 2, ferner für 60 und 32 die Zahl 4, denn 60 : 4 = 15; 32 : 4 = 8, wo die Quotienten 15 und 8 Primzahlen unter sich sind, so wie die vorigen 3 u. 2 (§. 66. I. Zus.).

I. Zusatz: Wenn von zweyen ungleichen Zahlen A > B ist, und wenn A durch B theilbar ist, so ist B das größte gemeine Maaß beyder Zahlen.

II. Zusatz: Wenn A durch B ohne Rest nicht theilbar ist, so kann das gemeine Maaß nicht größer als der Rest z. B. C seyn. (§. 69.)

III. Zusatz:

III. Zuſatz: Wenn der Reſt C die kleinere Zahl B theilet, ſo iſt C das gröſste gemeine Maaſs der beyden Zahlen A, B. (§. 68.).

§. 71.

Aufgabe:

Für zwey gegebene ganze Zahlen A und B das gröſste gemeine Maaſs ſuchen.

Auflöſung:

1. Man theile die gröſsere A durch die kleinere B; iſt nun B in A ohne Reſt enthalten, ſo iſt B das geſuchte Maaſs. (§. 70. I. Zuſ.)

2. Iſt aber A durch B nicht theilbar, ſo dividire man den Diviſor B durch den Reſt C; iſt nun B durch C theilbar, ſo iſt C das gröſste gemeine Maaſs für die Zahlen A und B. (§. 70. III. Zuſ.)

3. Giebt aber B : C wieder einen Reſt D, ſo theile man den vorigen Reſt C durch den neuen D, und wenn C durch D theilbar iſt, ſo iſt D das gröſste gemeine Maaſs für C und B (§. 70. III. Zuſ.), folglich auch für A.

4. Dieſes Verfahren ſetze man ſo lange fort, bis man auf einen Reſt kömt, der den vorgehenden ohne neuen Reſt theilet, dieſer Reſt iſt nun das gröſste gemeine Maaſs aller vorhergehenden Reſte, folglich auch der geſuchten Zahlen (§. 68. u. 70. III. Zuſ.).

5. Kömt man bey dieſem Verfahren auf einen Reſt = 1, ſo zeigt dieſer an, daſs die gegebenen Zahlen A. B kein gemeines Maaſs haben; folglich Primzahlen unter ſich ſind. (§. 66.).

Beyspiel:

Man suche das größte gemeine Maaß für die Zahlen 1155 und 360.

a		b	
A = 1155	[3	B = 360	[4
B = : 360		C = 75	
1080		300	
C = 75		D = 60	

c		d	
C = 75	[1	D = 60	[4
D = 60		E = 15	
E = 15		60	

folglich ist der Rest E = 15 das gesuchte größte gemeine Maaß für die Zahlen A = 1155, und B = 360; denn 1155 : 15 = 77; 360 : 15 = 24, welches Primzahlen unter sich sind.

Anmerk. Um in der Ausübung schnell zu überschauen, ob, und durch welche der ersten zehn Zahlen eine gegebene ganze Zahl theilbar sey, lassen sich sehr bequeme Regeln entwickeln.

1. Jede gegebene Zahl besteht immer nur aus den gewöhnlichen zehn Ziffern (24).

2. Drückt man den natürlichen Werth der Ziffern am Einer Platz durch a, an der nächsthöhern Stelle durch b, und so an den folgenden durch c, d, e u. s. f.,

3. den Localwerth aber durch die beygesetzten Factoren 10, 100, 1000 u. s. w. aus: so ist

4. a + 10 b + 100 c + 1000 d, 10000 e u. s. f. ein allgemeiner Ausdruck für jede mögliche ganze Zahl, wo man durch die Verschiedenheit der Buchstaben zugleich die Stelle wahrnimmt, die dem Ziffer bey der gegeben Zahl zukömmt, z. B. c drückt das Ziffer an der dritten Stelle, aber ohne Localwerth, aus.

5. Dividirt man nun diesen allgemeinen Ausdruck nacheinander der Ordnung nach durch alle Zahlen von 2 bis zehn, läßt dabey die Quotienten weg, und setzet die bleibenden Reste nebeneinander in einer horizontalen Reihe, so erhält man folgende Tabelle.

	:	a + 10 b + 100 c + 1000 d + 10000 e + ...
I	2	a
II	3	a + b + c + d + e + ...
III	4	a + 2 b
IV	5	a
V	6	a + 4 b + 4 c + 4 d + 4 e + ...
VI	7	a + 3 b + 2 c + 6 d + 4 e + ...
VII	8	a + 2 b + 4 c
VIII	9	a + b + c + d + e + ...
IX	10	a

Aus dieser Tabelle entspringen folgende Regeln:

A Wenn das letzte oder niedrigste Ziffer einer gegebenen Zahl durch 2, 5, oder 10 (im letzten Falle muß das niedrigste Ziffer a = 0 seyn) theilbar ist, so ist die ganze Zahl durch 2, 5, oder 10

theilbar. (I., IV., IX. Tab.) z. B. 468 ist durch 2; 465 durch 5; und 460 durch 10 theilbar.

B Läßt sich die Summe des niedrigsten, und des doppelten folgenden Ziffers durch 4 theilen, so ist die ganze gegebene Zahl durch 4 theilbar. Z. B. 628 ist durch 4 theilbar, weil 8 + 4 = 12 durch 4 theilbar ist. (Tab. III.)

C Addirt man alle Ziffern, ohne ihren Localwerth in Betracht zu ziehen, zusammen, und läßt sich die Summe durch 3 oder 9 theilen, so läßt sich die ganze gegebene Zahl durch 3 und 9 theilen, 3654 läßt sich sowohl durch 3 als 9 theilen, weil 4 + 5 + 6 + 3 = 18 durch beyde theilbar ist (Tab. II. VIII.).

D Addirt man das einfache niedrigste, das doppelte nächsthöhere, und das vierfache darauf folgende Ziffer zusammen, so ist die ganze gegebene Zahl durch 8 theilbar, wenn es obige Summe ist. Z. B. 52488 ist durch 8 theilbar; denn 8 + 16 + 16 = = 40 läßt sich durch 8 theilen. (Tab. VII.)

Aus Nr. V. und VI. läßt sich keine für die Anwendung bequeme folglich brauchbare Regel angeben.

§. 72.

Erklärungen:

a Eine Zahl, die durch 2 theilbar ist, heißt eine gerade (numerus par),

b die nicht durch 2 theilbar ist, eine ungerade Zahl (numerus impar).

I. Zuſatz: Wenn m und n ganze Zahlen bezeichnen, ſo läßt ſich jede gerade Zahl durch 2 m, oder 2 n; und jede ungerade durch 2 m + 1; 2 n + 1 oder auch durch 2 m — 1, und 2 n — 1 ausdrücken.

II. Zuſatz: Die Summe ſowohl als die Differenz zweyer gerader Zahlen iſt gerade; denn
2 n + 2 m = 2 (n + m), und 2 n — 2 m = 2 (n — m) jede durch 2 theilbar (§. 51. II. Zuſ. (z. B. 8 + 6 = 14, und 8 — 6 = 2.

III. Zuſatz: Die Summe ſowohl als die Differenz zweyer ungeraden Zahlen iſt eine gerade Zahl; denn
(2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1), und
(2n + 1) — (2m + 1) = 2n — 2m = 2(n — m), jede alſo durch 2 theilbar. Z. B. 7 + 5 = 12; 7 — 5 = 2

IV. Zuſatz: Die Summe ſowohl, als die Differenz einer geraden und ungeraden Zahl iſt ungerad. Denn
2n + (2m + 1) = 2n + 2m + 1 = 2(n + m) + 1
2n — (2m + 1) = 2n — 2m — 1 = 2(n — m) — 1
(2n + 1) — 2m = 2n — 2m + 1 = 2(n — m) + 1
wo offenbar keine durch 2 theilbar iſt. Z. B. 7 + 8 = 15; 15 — 6 = 9; 10 — 7 = 3.

V. Zuſatz: Das Product zweyer gerader, oder auch einer geraden in eine ungerade Zahl, iſt gerade; denn
2 n × 2 m = 4 n m
(2 n + 1) × 2 m = 4 m n + 2 m, jeder wieder durch 2 theilbar. Z. B. 4 × 8 = 32; 3 × 8 = 24;

VI. Zuſatz: Das Product zweyer ungerader Zahlen iſt wieder eine ungerade Zahl.
Denn (2m + 1) × (2n + 1) = 4mn + 2n + 2m + 1
= 2(2mn + n + m) + 1 welches
durch 2 nicht theilbar iſt. Z. B. 7 × 9 = 63.

II. Hauptstück.

Von gebrochenen Zahlen.

I. Abschnitt.

Von der Beschaffenheit der Brüche überhaupt, und ihrer Bezeichnungsart.

§. 73.

Erklärungen:

a Ein oder mehrere Theile eines Ganzen A nennet man im Verhältniße zu diesem Ganzen A einen Bruch, oder in wie fern man nur auf die Größe und Anzahl der Theile sieht, eine gebrochene Zahl (§. 21.)

b Jene Zahl, welche die Anzahl der Theile des Ganzen angiebt, heißt der Nenner (Denominator); jene Zahl hingegen, welche die Anzahl der gegebenen Theile angiebt, heißt der Zähler des Bruches (Numerator).

c Einen Bruch bezeichnet man dadurch, daß man den Nenner unter den Zähler, und zwischen sie einen Strich setzet. Z. B. $\frac{3}{4}$ zeiget an, daß das Ganze aus 4 Theilen bestehe, von welchen 3 gegeben sind.

I. Zusatz: $\frac{a}{b}$ einer Größe A zeiget also an, daß man die zusammengesetzte Größe A in b Theile zerfallen, und so einen Theil, mithin den Quotienten a mal neh-

nehmen soll, das ist: $\frac{a}{b} A = (A : b) \times a$. z. B. $\frac{3}{5}$ fl. drückt aus, daß man den Gulden in 5 Theile theilen, und den 5ten Theil, oder einen Zwifer nach unserer Münze dreymal nehmen soll.

II. Zusatz: Bey Brüchen wird die Grösse A als ein Ganzes, mithin als eine Einheit höherer Art (§. 20.) genommen, und läßt sich also als Grösse durch 1 ausdrücken' mithin bey gebrochenen Zahlen ist $\frac{a}{b} = (1 : b) \times a$.

§. 74.

Lehrsatz:

Bey jedem Bruche läßt sich der Zähler als Dividend, der Nenner als Divisor, und der Bruch selbst als der Quotient betrachten; oder $\frac{a}{b} = a : b$

Beweis:

$\frac{a}{b} = (1 : b) \times a$ (73. II. Zus.)

$= a : b$ (§. 50.)

I. Zusatz: Es ist gleich viel, ob man zwischen den Zähler und Nenner das Divisionszeichen, oder das Bruchzeichen schreibt.

II. Zusatz: Bey Brüchen die gleiche Nenner haben, verhält sich ihre Grösse, wie jene ihrer Zähler, z. B. $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$, denn da in beyden das Ganze in gleich viele Theile getheilet wird, so enthält offenbar der erste Bruch mehrere solche Theile als der zweyte, und ist daher grösser als der zweyte.

III.

III. Zusatz: Bey Brüchen von gleichen Zählern ist jener Bruch grösser, der den kleinern Nenner hat. Z. B. $\frac{5}{7} > \frac{5}{8}$; denn im erstern Bruche werden die Theile grösser, weil man das ganze in wenigere Theile theilet, und man eben so viele solche grössere Theile nimmt, als im zweyten Bruche kleinere.

IV. Zusatz: Ein Bruch ist um so viel grösser, je grösser sein Zähler, und je kleiner dessen Nenner ist.

V. Zusatz: Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man mit selber entweder den Zähler multiplicirt, oder den Nenner dividirt. d. i.:

$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; und überhaupt $\frac{a}{nc} \times n = \frac{na}{nc} = \frac{a}{c}$ (§. 50.)

VI. Zusatz: Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man mit der ganzen Zahl entweder den Zähler dividirt, oder den Nenner multiplicirt. d. i.

$\frac{3}{7} : 2 = \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$; allgem. $\frac{nc}{a} : n = \frac{c}{a} = \frac{nc}{na}$ (§. 50.)

VII. Zusatz: Ein Bruch bleibt unverändert, wenn man den Zähler sowohl als den Nenner mit der nemlichen Zahl multiplicirt, oder dividirt. d. i.

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$; $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; überh. $\frac{a}{c} = \frac{na}{ne}$; und $\frac{mb}{mc} = \frac{b}{c}$ (§. 50. Zus.)

§. 75.

Erklärungen:

a Ein Bruch, dessen Zähler kleiner, als der Nenner ist, heißt ein eigentlicher Bruch (Fractio vera.)

b Iſt hingegen der Zähler gröſſer als der Nenner, ein uneigentlicher, oder unächter Bruch (Fractio ſpuria.)

Zuſatz:

Jede ganze Zahl a läſst ſich bruchartig ausdrücken, oder in einen unächten Bruch verwandeln; denn

$a = a : 1$ (§. 43. III. Zuſ.) $= \frac{a}{1}$ (§. 74.)

§. 76.

Erklärungen:

a Einen Bruch auf eine kleinere Benennung bringen, heiſst ſolchen in einen gleichen Bruch verwandeln, deſſen Zähler und Nenner kleinere Zahlen ſind,

b Einen gegebenen Bruch auf die kleinſte Benennung bringen, heiſst ihn in einen gleichen verwandeln, deſſen Zähler und Nenner Primzahlen unter ſich ſind.

§. 77.

Aufgabe:

Einen gegebenen Bruch auf eine kleinere Benennung zu bringen. Z. B. $\frac{34}{51}$.

Auflöſung:

Man dividire den Zähler und Nenner, wenn ſie nicht Primzahlen unter ſich ſind, mit ihrem gemeinen Maaſse (§. 65.), ſo iſt der neue Bruch der verlangte, z. B. $\frac{34}{51} = \frac{34 : 17}{51 : 17} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ (§. 74. VII. Zuſ.)

§. 78.

§. 78.

Aufgabe:

Einen gegebenen Bruch auf die kleinste Benennung zu bringen, z. B. $\frac{42}{56}$.

Auflösung:

1. Man suche das gröſste gemeine Maaß für den Nenner und Zähler des gegebenen Bruches. (§. 71.)
2. Durch dieſes Maaß dividire man den Zähler und Nenner, so geben die Quotienten den Zähler und Nenner des gesuchten Bruches. z. B. $\frac{42}{56} = \frac{42}{56} : \frac{14}{14} = \frac{3}{4}$.

Beweis:

Durch die Division mit dem gröſsten gemeinen Maaße bleibt der Werth des Bruches unverändert, (§. 74. VII. Zus), und der Zähler und Nenner sind Primzahlen unter sich in dem neuen Bruche (§. 71.)

Anmerkung:

In der Ausübung leisten zur Auflösung beyder Aufgaben §. 77. und 78. die in der Anmerkung §. 71. angegebenen Regeln sehr gute Dienste.

§. 79.

Erklärung:

Zwey oder mehrere gegebene Brüche unter einerley Benennung bringen, heiſst sie in gleiche Brüche verwandeln, die alle einerley Nenner haben.

§. 80.

Aufgabe:

Mehrere gegebene Brüche unter einerley Benennung zu bringen:

z. B.

z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, oder überhaupt $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$:

Auflösung:

1. Man multiplicire jeden Zähler in alle Nenner der übrigen Brüche, nur in den seinen nicht, und nehme diese Producte für die Zähler,

2. multiplicire nun auch alle Nenner, und nehme dieses Product für den gemeinschaftlichen Nenner z. B.

$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$; $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$; $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$; $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$

Beweis:

Durch dieses Verfahren wird bey jedem Bruche der Zähler sowohl als der Nenner mit dem Producte der Nenner aller übrigen Brüche, mithin beyde mit der nemlichen Zahl multiplicirt, folglich sind die neuen Brüche den vorigen gleich. (§. 74. VII. Zus.)

Zusatz:

Jede Zahl, die durch alle einzelne Nenner theilbar ist, kann man für den gemeinschaftlichen oder General-Nenner annehmen, wenn man sie durch den Nenner des ersten Bruches dividirt, und mit den Quotienten dessen Zähler multiplicirt, und so bey allen übrigen Brüchen verfährt (§. 74. VII. Zus.) z. B. für die Brüche $\frac{7}{12}$, $\frac{2}{3}$ kann die Zahl 24 gebraucht werden, weil sie durch beyde Nenner theilbar ist, und 24 : 12 = 2; mithin $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$; 24 : 8 = 3; mithin $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ ist.

§. 81.

Nro. 1. 2. 8, 12, 6, 9, 5

(4) 2, 3, 6, 9, 5

Nro. 3. (2) 1, 3, 3, 9, 5

(3) 1, 1, 1, 3, 5

Mithin ist $3 \times 5 \times 3 \times 2 \times 4 = 360$ der gesuchte Generalnenner. Nro. 5.

Nro. 6 — 8.

	(360)		
$\frac{3}{8}$	45	135	mithin Nro. 9. $\frac{3}{8} = \frac{135}{360}$
$\frac{7}{12}$	30	210	$\frac{7}{12} = \frac{210}{360}$
$\frac{5}{6}$	60	300	$\frac{5}{6} = \frac{300}{360}$
$\frac{2}{9}$	40	80	$\frac{2}{9} = \frac{80}{360}$
$\frac{4}{5}$	72	288	$\frac{4}{5} = \frac{288}{360}$

II. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit Brüchen überhaupt.

§. 82.

Aufgabe:
Gegebene Brüche zu addiren.

Auflösung:
1. Haben sie gleiche Nenner, so addire man ihre Zähler, und setze unter die Summe den unveränderten Nenner; oder

$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$; und überhaupt: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

2. Has

2. Haben sie ungleiche Nenner, so bringe man sie nach (§. 80 oder 81.) unter einerley Benennung, und addire wieder ihre Zähler; oder

$\frac{4}{7} + \frac{5}{9} = \frac{36}{63} + \frac{35}{63} = \frac{71}{63}$; überh. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Beweis:

Durch das angegebene Verfahren bekömmt man jedesmal einen neuen Bruch, welcher so viele gleichartige Theile des Ganzen, als die gegebenen Brüche zusammen, enthält, folglich ist er die verlangte Summe (§. 29.).

§. 83.

Von einem größern Bruch einen kleinern abzuziehen.

Auflösung:

1. Haben die Brüche gleiche Nenner, so ziehe man den kleinern Zähler vom größern ab, und setze unter den Rest den unveränderten Nenner; d. i.

$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8}$; allgemein $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

2. Haben sie verschiedene Nenner, so bringe man sie wieder auf einerley Benennung (§. 80. und 81.) und subtrahire den kleinern Zähler; oder

$\frac{5}{7} - \frac{3}{4} = \frac{24}{28} - \frac{21}{28} = \frac{3}{28}$: allgemein: $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{ad-bc}{bd}$

Be-

Beweis:

Der durch dieſes Verfahren gefundene Bruch giebt an, wie viele gleichartige Theile des Ganzen dem kleinern Bruche addirt werden müſſen, um den größern zu erzeugen, mithin iſt er die geſuchte Differenz. (§. 29.)

Zuſatz:

Brüche werden zu ganzen Zahlen addirt, von ganzen Zahlen ſubtrahirt, wenn man die ganzen Zahlen bruchartig ausdrückt (§. 75. Zuſ.) und wie bey Brüchen verfährt.

§. 84.

Aufgabe:

Zwey gegebene Brüche miteinander zu multipliciren.

Auflöſung:

Man multiplicire die Zähler und Nenner miteinander:

d. i. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$; allgemein $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Beweis:

Einen Bruch mit einem Bruche multipliciren heißt den erſten in ſo viele Theile theilen, als der Nenner des zweyten beſtimmt; und ſolch einen Theil ſo vielmal nehmen, als der Zähler des zweyten Bruches angiebt, (§. 43 und §. 73. I. Zuſ.) d. i. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ heißt den 5ten Theil des Multiplicands $= \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{20}$ (§. 74. IV. Zuſatz) zweymal nehmen $= \frac{6}{20}$ (§. 74. V Zuſ.) oder allgemein $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

I. Zuſatz: Brüche werden mit ganzen Zahlen, und ganze Zahlen mit Brüchen nach (§. 74. V. Zuſ.) multiplicirt.

II. Zuſatz: Bey Brüchen ſowohl unter ſich, als mit ganzen Zahlen geben die Factoren mit veränderter Ordnung einerley Product; oder $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

Denn $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db}$ (§. 45. I. Zuſ.) $= \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

III. Zuſatz: Ein Product zweyer Brüche wird durch eine ganze Zahl, oder einen Bruch multiplicirt, wenn man nur einen beliebigen Factor damit multiplicirt, d. i. $(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}) \times 6 = \frac{12}{21} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{24}{7}$;

allgemein: $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times n = n\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times n\frac{c}{d}$

Eben ſo; $(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}) \times \frac{6}{11} = \frac{12}{21} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{24}{77}$

allgemein: $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{n}{m} = \frac{na}{mb} \times \frac{c}{d}$

$= \frac{a}{b} \times \frac{nc}{md} = \frac{na}{b} \times \frac{c}{md}$ (§. 51.)

Denn $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{n}{m} = \frac{acn}{bdm} = \frac{nac}{mbd} = \frac{na}{mb} \times \frac{c}{d}$

$= \frac{anc}{bmd} = \frac{a}{b} \times \frac{nc}{md}$

$= \frac{nac}{bmd} = \frac{na}{b} \times \frac{c}{md}$

IV. Zuſatz: Ein Bruch, oder eine ganze Zahl wird mit dem Producte zweyer Brüche multiplicirt, wenn

man nur mit einem beliebigen Factor wirklich multiplicirt, und den andern unverändert beyſetzt; d. i.

$4 \times (\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}) = \frac{8}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{20}{6}$

allgemein: $n \times \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) = n\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times n\frac{c}{d}$

Eben ſo $\frac{4}{7} \times (\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}) = \frac{8}{21} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{20}{42}$

Allgemein: $\frac{n}{m} \times \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) = \frac{na}{mb} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{nc}{md}$

$= \frac{na}{b} \times \frac{c}{md}$

Denn $\frac{n}{m} \times \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{n}{m}$ (II. Zuſ.)

$= \frac{na}{mb} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{nc}{md} = \frac{na}{b} \times \frac{c}{md}$ (III. Zuſ.).

§. 85.

Aufgabe:
Einen Bruch mit einem Bruch zu dividiren.

Auflöſung:
Man multiplicire den Dividend mit dem umgekehrten Diviſor; d. i.:

$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$; allgemein $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{na}{mb}$

Beweis:

1. Einen gegebenen Bruch $\frac{a}{b}$ durch einen andern $\frac{m}{n}$ dividiren heißt erſtern durch den nten Theil der Zahl m dividiren, ſo daß der Quotient der $\frac{m}{n}$ Theil des Dividends iſt, mithin mit dem Diviſor multiplicirt den Dividend wieder erzeuget (§. 43. b.)

2. Di-

2. Dividiret man nun den Bruch $\frac{a}{b}$ mit dem Zähler m, so ist der Quotient $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{mb}$ (§. 74. VI. Zuſ.) mal zu klein, mithin giebt

3. letzterer mit n multiplicirt, das iſt $\frac{a}{mb} \times n = \frac{na}{mb}$ (§. 74. V. Zuſ.) den wahren Quotienten, das iſt $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{na}{mb}$; ſo wie auch dieſer Quotient mit dem Diviſor multiplicirt den Dividend wieder erzeuget, denn $\frac{na}{mb} \times \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ (§. 43. V. Zuſ.)

I. Zuſatz: Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl nach (§. 74. VI. Zuſ.) dividirt.

II. Zuſatz: Eine ganze Zahl wird mit einem Bruche dividirt, wenn man den Diviſor umkehret und multiplicirt; d. i. $a : \frac{n}{m} = \frac{ma}{n}$; denn $a : \frac{n}{m} = \frac{a}{1} \times \frac{m}{n} = \frac{ma}{n}$

III. Zuſatz: Ein Product zweyer Brüche wird mit einer ganzen Zahl, oder einem Bruche dividirt, wenn man nur einen beliebigen Factor damit dividirt; $(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) : a = \frac{c}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

allgemein $: \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) : n = \frac{a}{nb} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{nd}$

Eben ſo $(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) : \frac{n}{m} = \frac{ma}{nb} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{mc}{nd}$

allgemein: $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) : \frac{n}{m} = \frac{ma}{nb} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{mc}{nd}$

Denn $\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right):\frac{n}{m}=\frac{acm}{bdn}=\frac{ma}{nb}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{mc}{nd}$

IV. Zusatz: Eine ganze Zahl, oder ein Bruch wird mit dem Producte zweyer Brüche dividirt; wenn man nur mit einem beliebigen Factor dividirt; d. i.

$$n:\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)=\frac{nb}{a}:\frac{c}{d}=\frac{nd}{c}:\frac{a}{b}$$

$$\frac{n}{m}:\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)=\frac{nb}{ma}:\frac{c}{d}=\frac{nd}{mc}:\frac{a}{b}$$

Denn $\frac{n}{m}:\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)=\frac{n}{m}:\frac{ac}{bd}=\frac{nbd}{mac}=\frac{nb}{ma}\times\frac{d}{c}$

$$=\frac{nb}{ma}:\frac{c}{d}=\frac{nd}{mc}\times\frac{b}{a}=\frac{nd}{mc}:\frac{a}{b}$$

V. Zusatz: Brüche, deren Zähler und Nenner selbst Brüche, oder aus ganzen und gebrochenen Zahlen zusammengesetzt sind, lassen sich auf einfache reduciren; d. i.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{4}:\frac{5}{6}\ (\S.\ 74.)=\frac{18}{20}$$

$$\frac{3+\frac{2}{3}}{4-\frac{6}{7}}=(3+\tfrac{2}{3}):(4-\tfrac{6}{7})=\tfrac{11}{3}:\tfrac{22}{7}=\tfrac{77}{66}$$

§. 86.

Lehrsatz:

Wenn man zur halben Summe zweyer Größen ihre halbe Differenz addirt, so bekommt man die größere, subtrahirt man die halbe Differenz von der halben Summe, so giebt der Rest die kleinere von den beyden Größen.

Be-

Beweis:

Es sey die grössere = a, die kleinere Grösse = b, so ist

$\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ $\quad$ $\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

$\frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ Und $\frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$

$\quad + \quad - \quad - \quad +$

$\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b) = a$ $\quad$ $\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b) = b$

III. Abschnitt.

Von den Decimalbrüchen insbesondere.

§. 87.

Erklärung:

Ein Bruch, dessen Nenner 1 mit angehängten Nullen ist, heißt ein zehentheiliger, oder Decimalbruch.

I. Zusatz: Im Decimalsysteme (§. 24.), so wie jedes Ziffer von der Rechten zur Linken an jeder Stelle einen zehnmal grössern Localwerth erhält, das ist, an den nächst höhern Platz Zehner, am folgenden Hunderte ausdrückt: so nimmt ihr Localwerth rückwärts von der linken zur rechten Seite immer um das Zehenfache ab, so daß das nächste Ziffer nach den Einern Zehntheile, das folgende Hunderttheile u. s. w. ausdrückt.

II. Zusatz: Setzet man nach den Einern ein Comma, damit ihre Stelle unverrückt bleibt, so kann bey Decimalbrüchen der Nenner ganz wegbleiben, wenn man im Zähler das Comma von der linken zur rechten Seite nach so viel Stellen oder Ziffern setzet, als der Nenner

ner Nullen enthält, und im Falle nicht so viele Ziffern vorhanden sind, selben Nullen vorsetzet; z. B. $\frac{3}{10} = 0,3$; $\frac{24}{10} = 2,4$; $\frac{28}{10000} = 0,0028$.

III. Zusatz: Der Werth der Decimalbrüche bleibt unverändert, wenn man denselben am Ende, oder im Anfange nach Belieben Nullen beifüget, d. i. $0,2 = 0,200 = 00,2$. Denn da die Ziffern, so lange das Comma an seiner Stelle bleibt, ihren Localwerth nicht ändern, so zeigen die letzten Ausdrücke nur, daß außer 2 Zehntheilen nichts vorhanden seye.

IV. Zusatz: Ein Decimalbruch wird mit 10, 100 u. s. w. multiplicirt, wenn man das Comma um so viele Stellen rückwärts setzet, als die Zahl Nullen enthält, d. i. $0,3 \times 10 = 3$; $0,3 \times 100 = 30$.
Denn um so viele Stellen, als man das Comma zurücksetzet, so viel zehnmal wird der Werth jedes Ziffers, mithin der ganze Bruch vermehret.

V. Zusatz: Ein Decimalbruch wird durch 10, 100 u. s. w. dividirt, wenn man das Comma um so viele Stellen vorwärts rücket, als die Zahl Nullen enthält, z. B. $23,4 : 10 = 2,34$; $23,4 : 1000 = 0,0234$.
Denn jedes Ziffer, mithin der ganze Bruch wird so viel zehnmal kleiner, als Stellen man das Comma vorwärtsrücket.

§. 88.

Aufgabe:

Gegebene Decimalbrüche zu addiren, oder zu subtrahiren.

Auf-

Auflösung:

Man setze die Brüche so untereinander, daß die Comma genau untereinander zu stehen kommen, addire und subtrahire sie wie ganze Zahlen, und setze in die Summe und den Resten das Comma wieder genau unter die vorigen Comma, z. B.

I. 23,9 8 1
0,0 9 7
5,2 7 1
Summe = 29,3 4 9

II. 5' 2', 0' 0 3
3 6, 9 8 2
Rest = 1 5, 0 2 1

Beweis:

Dadurch, daß die Comma untereinander gesetzet werden, so kommen immer gleichartige Zahlen untereinander zu stehen, und da man im ersten Falle alle einzelne Theile addirt, im zweyten voneinander subtrahirt, so erhält man die Summe und Differenz der ganzen Brüche.

§. 89.

Aufgabe:

Decimalbrüche miteinander zu multipliciren.

Auflösung:

Man multiplicire sie wie ganze Zahlen, und setze das Comma von der Rechten zur Linken nach so viel Decimalstellen, als beyde Factoren zusammen enthalten, z. B. 2,325 × 4,23;

2 3 2 5
4 2 3
6 9 7 5
4 6 5 0
9 3 0 0
9,8 3 4 7 5

0,36 × 0,043

3 6
4 3
1 9 8
1 4 4
0,0 1 5 4 8

Be-

Beweis:

Wenn man die gegebene Factoren auf den Ausdruck gewöhnlicher Brüche reducirt (§. 87. II. Zusatz), so besteht ihr Product aus dem Producte der Zähler und jenem der Nenner (§. 84.), das ist, aus einem Bruche, dessen Zähler aus dem Producte der gegebenen Decimalbrüche, als ganze Zahlen betrachtet, und der Nenner aus 1 mit so vielen Nullen besteht, als beyde Brüche zusammen Decimalstellen enthalten (§. 51. IV. Zus.), will man also diesen Nenner weglassen, so muß man im Zähler so viele Decimalstellen abschneiden, als Nullen vorhanden sind, mithin die gegebene Factoren zusammen Decimalstellen enthalten, d. i.

$2{,}325 \times 4{,}69 = \frac{2325}{1000} \times \frac{469}{100} = \frac{1090425}{100000} = 9{,}83475$

$0{,}36 \times 0{,}043 = \frac{36}{100} \times \frac{43}{1000} = \frac{1548}{100000} = 0{,}01548.$

§. 90.

Aufgabe:

Einen Decimalbruch durch einen andern zu dividiren.

I. Wenn sie gleichviel Decimalstellen enthalten,

II. Wenn der Divisor mehr Decimalstellen enthält als der Dividend,

III. Wenn der Dividend mehr Decimalstellen als der Divisor enthält.

Auf-

Auflösung:

des I. Falles: Man dividire wie bey ganzen Zahlen; z. B. 0,24 : 0,08 = 24 : 8 = 3

des II. Falles: Man setze dem Dividend so viele Nullen bey, als der Divisor mehr Decimalstellen enthält, und verfahre wie im ersten Falle, z. B. 0,24 : 0,0008 = 2400 : 8 = 300

des III. Falles: Man dividire wie bey ganzen Zahlen, und setze im Quotienten das Comma nach so vielen Decimalstellen, als der Dividend mehr, als der Divisor enthält, z. B. 0,0024 : 0,8 = 0,003.

Beweis.

Wenn man die gegebenen Decimalbrüche auf gemeine reducirt, so wird bey ihrer Division der Dividend mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt (§. 85.), das ist: der Quotient wird ein Bruch, dessen Zähler ein Product aus dem Zähler des Dividends in den Nenner des Divisors und dessen Nenner ein Product aus dem Zähler des Divisors in den Nenner des Dividends ist;

Im I. Falle heben sich die letzten Factoren im Zähler und Nenner gegeneinander auf, mithin besteht der Quotient aus dem Zähler des Dividends dividirt durch den Zähler des Divisors, oder aus dem Quotienten, wenn man die gegebenen Brüche als ganze Zahlen behandelt, d. i.

$0{,}24 : 0{,}08 = \frac{24}{100} : \frac{8}{100} = \frac{24}{100} \times \frac{100}{8} = \frac{24}{8} \times \frac{100}{100} = \frac{24}{8} = 3$

Im II. Falle; Wenn man im Anfange dem Dividend so viele Nullen am Ende anhängt, bis er mit dem Divisor

gleich-

III. Hauptstück.

Von Potenzen und Wurzeln der Zahlen.

I. Abschnitt.

Von Erzeugung der Potenzen, und Ausziehung der Wurzeln aus einfachen Größen.

§. 92.

Erklärungen:

a. Ein Product aus gleichen Factoren heißt eine Potenz oder Dignität; die Anzahl der gleichen Factoren heißt der Grad, oder Exponent der Potenz; die zweyte Dignität, oder das Product zweyer gleicher Factoren nennet man das Quadrat, die dritte Dignität den Cubus.

b. Eine Potenz bezeichnet man dadurch, daß man nur einen der Factoren ausdrücket, ihre Anzahl oder den Exponenten rechts ober diesen Factor schreibt, z. B. $a^2 = aa$; $a^3 = aaa$; $a^n = a.\ a.\ a. \ldots\ldots n.$

I. Zusatz: Bey der angegebenen Bezeichnungsart kommen bey jeder Potenz drey verschiedene Größen vor, nemlich die Größe selbst oder der Factor, der

Ex-

Auflösung:

des I. Falles: Man dividire wie bey ganzen Zahlen; z. B. 0,24 : 0,08 = 24 : 8 = 3

des II. Falles: Man setze dem Dividend so viele Nullen bey, als der Divisor mehr Decimalstellen enthält, und verfahre wie im ersten Falle, z. B. 0,24 : 0,0008 = 2400 : 8 = 300

des III. Falles: Man dividire wie bey ganzen Zahlen, und setze im Quotienten das Comma nach so vielen Decimalstellen, als der Dividend mehr, als der Divisor enthält, z. B. 0,0024 : 0,8 = 0,003.

Beweis:

Wenn man die gegebenen Decimalbrüche auf gemeine reducirt, so wird bey ihrer Division der Dividend mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt (§. 85.), das ist: der Quotient wird ein Bruch, dessen Zähler ein Product aus dem Zähler des Dividends in den Nenner des Divisors und dessen Nenner ein Product aus dem Zähler des Divisors in den Nenner des Dividends ist;

Im I. Falle heben sich die letzten Factoren im Zähler und Nenner gegeneinander auf, mithin besteht der Quotient aus dem Zähler des Dividends dividirt durch den Zähler des Divisors, oder aus dem Quotienten, wenn man die gegebenen Brüche als ganze Zahlen behandelt, d. i.

$0{,}24 : 0{,}08 = \frac{24}{100} : \frac{8}{100} = \frac{24}{100} \times \frac{100}{8} = \frac{24}{8} \times \frac{100}{100} = \frac{24}{8} = 3$

Im II. Falle; Wenn man im Anfange dem Dividend so viele Nullen am Ende anhängt, bis er mit dem Divisor

gleich-

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 94.

Erklärungen:

a. Die Quadratwurzel einer Zahl a heißt jene Zahl, die mit sich selbst multiplicirt a wieder giebt; die Cubicwurzel von a jene Zahl, die mit sich selbst dreymal multiplicirt, a zum Product giebt, z. B. 2 ist die Cubicwurzel von 8, und die Quadratwurzel von 4, weil $2\times2\times2=8$, und $2\times2=4$ ist: überhaupt heißt die nte Wurzel von a jene Zahl, die mit sich selbst n mal multiplicirt das Product a giebt. Die Zahl 2 bey der Quadratwurzel, die Zahl 3 bey der Cubicwurzel, und n bey der nten Wurzel heißt der Exponent der Wurzel.

b. Um die Wurzel auszudrücken, setzt man der Zahl das Zeichen ($\surd$) vor, und schreibt in solches die Exponenten der Wurzel, nur bey der Quadratwurzel wird der Exponent ganz hinweggelassen, z. B. $\surd 8$. $\surd 4$, $\surd 2$.

1. Zusatz. Bey der angegebenen Bezeichnungsart der Wurzeln kömmt jene Größe vor, aus der die Wurzel ausgezogen werden soll, ferner der Exponent, oder der Grad der Wurzel, und endlich der Coefficient, oder die Zahl, welche angiebt, wievielmal, oder der

wie-

wievielte Theil der Wurzelgröße vorhanden ist; z. B.

$3\sqrt[n]{a}$; $\frac{1}{2}\sqrt[n]{b}$.

II. Zusatz: So wie die Potenz (§. 92. II. Zus.) muß auch allemal die Wurzel eine Zahl seyn; d. i. die Ausdrücke: Potenz einer Größe, Wurzel einer Größe beziehen sich nur auf Größen als Zahlen betrachtet.

III. Zusatz: Von Potenzen und Wurzeln gelten also alle jene Sätze, die bisher von ganzen und gebrochenen Zahlen überhaupt sind erwiesen worden.

IV. Zusatz: Die Wurzel von einem ächten Bruche ist keine ganze Zahl (§. 92. III. Zus.)

§. 95.

Anwendung des 9ten Grundsatzes (§. 19.) auf Potenzen und Wurzeln:

1. Von gleichen Größen sind alle Potenzen und Wurzeln von einerley Grade gleich; d. i.

Wenn $a = b$; so ist $a^n = b^n$ und $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$.

2. Von ungleichen Zahlen sind Potenzen und Wurzeln von einerley Grade verschieden, und die größere Zahl giebt eine größere Potenz und Wurzel, als die kleinere, d. i.

Wenn $a > b$; so ist $a^n > b^n$, und $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

§. 96.

Lehrsatz.

Die Potenz eines Productes ist ein Product aus den Potenzen der Factoren; oder man erhebt ein Product

duct zu einer verlangten Dignität, wenn man jeden Factor zu solcher erhebt; d. i. $(a\,b)^m = a^m\,b^m$

Beweis:

$(a\,b)^m = a\,b.\,a\,b.\,a\,b \ldots\ldots m$; d. i. ein Product aus m Factoren a b (§. 92.), oder aus m Factoren a in eben so viele b, d. i. $a^m.\ b^m$.

z. B. $(3\times4)^2 = 9\times16 = 144$; $(2.3.)^3 = 8.27 = 216$.

Zusatz:

Die Wurzel eines Productes ist wieder ein Product aus den Wurzeln der Factoren, oder man zieht aus einem Producte eine verlangte Wurzel aus, wenn man aus jedem Factor eine solche auszieht; $\sqrt[m]{(a\,b)} = \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}$.

Denn

$(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b})^m = a\,b.$ z. B. $\sqrt{(16\times9)} = 4\times3 = 12$.

§. 97.

Lehrsatz:

Die Potenz eines Bruches ist wieder ein Bruch aus der Potenz des Zählers und Nenners, oder man erhebt einen Bruch zu einer verlangten Dignität, wenn man den Zähler sowohl als den Nenner dazu erhebt, d. i. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Beweis:

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\ldots m$ (§. 92.) $= \frac{a^m}{b^m}$ (§. 84.)

z. B. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

I. Zusatz: Die Wurzel eines Bruches ist wieder ein Bruch aus der Wurzel des Zählers und Nenners, oder man zieht aus einem Bruche eine verlangte Wurzel, wenn man sie sowohl aus dem Zähler, als dem Nenner auszieht; oder

$$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}; \text{ denn } \left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{a}{b}$$

z. B. $\sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{2}{4}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

II. Zusatz: Jede Potenz eines ächten Bruches ist wieder ein ächter Bruch; denn man erhält die Potenz eines Bruches, wenn man den Zähler so oft mit sich selbst, und eben so den Nenner mit sich selbst so oft multiplicirt, als der Exponent der verlangten Dignität angiebt; nun ist aber bey einem ächten Bruche das Product der Zähler kleiner, als jenes der Nenner, mithin die Potenz wieder ein ächter Bruch. (§. 75.)

III. Zusatz: Jede Potenz eines unächten Bruches, der sich auf keine ganze Zahl bringen läßt, ist wieder ein Bruch von der nämlichen Art. Man kann diesen Bruch auf seine kleinste Benennung bringen, im Falle er nicht schon durch die kleinste Benennung gegeben ist; nun sey sein Ausdruck $\frac{u}{x}$; wo also $u > x$, und beyde Primzahlen unter sich sind (§. 78.). Wäre nun irgend eine Potenz dieses Bruches, z. B. das Quadrat eine ganze Zahl n; so das $\frac{u^2}{x^2} =$

$\frac{u.u}{x.x} = n$; so mußte auch $\frac{u.u}{x} = nx$ eine ganze Zahl, mithin u. u. durch x theilbar seyn. Da aber das Product u u keine andere Factoren als der einfache Factor u enthält, x aber mit u keinen Factor gemein hat, so ist x kein Maaß von u u, mithin $\frac{u^2}{x^2}$ keine ganze Zahl; das nemliche gilt von jeder andern Potenz.

IV. Zusatz: Wenn die Wurzel einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist, so ist sie auch kein Bruch, denn sonst müßte auch die Potenz, d. i. die gegebene Zahl gegen die Annahme ein Bruch seyn; so eine Wurzel läßt sich also nie vollständig angeben, z. B.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}$ u. s. f.

§. 98.

Erklärung:

Eine Zahl, die sich durch eine ganze, oder gebrochene Zahl vollkommen darstellen läßt, heißt eine Rationalzahl, die sich hingegen weder durch eine ganze, noch eine gebrochene Zahl vollständig angeben läßt, heißt eine Irrationalzahl.

Zusatz:

Wurzeln aus ganzen Zahlen, die keine ganze Zahlen sind (§. 97. IV. Zus.), sind Irrationalgrößen oder Irrationalzahlen, z. B. $\sqrt{24}$; $\sqrt[3]{48}$.

§. 99.

§. 99.

PARSONS LIBRARY University of MICHIGAN

Lehrſatz:

Jede Potenz einer poſitiven Größe iſt poſitiv.

Beweis:

Das Product aus lauter poſitiven Factoren iſt poſitiv (§. 60. Zuſ.), und jede Potenz einer poſitiven Größe oder Zahl iſt ſo ein Product (§. 92.), z. B. $(+a)^4 = +a^4$.

§. 100.

Lehrſatz:

Von einer negativen Größe ſind alle Potenzen

I. mit geraden Exponenten poſitiv,

II. mit ungeraden Exponenten negativ.

Beweis I.: Jede Potenz einer negativen Größe mit einem geraden Exponenten läßt ſich durch $(-a)^{2n}$ ausdrücken (§. 72. I. Zuſ.), iſt daher ein Product aus $2m$ oder n Paar gleichen Factoren, nun iſt aber das Product eines jeden Paares poſitiv, denn $-a \times -a = +a^2$, folglich iſt auch das Product von n ſolchen Paaren, mithin die Potenz ſelbſt poſitiv oder $(-a)^{2n} = +a^{2n}$; z. B. $-3 \times -3 = +9$.

Beweis von II. Die Potenz einer negativen Größe mit einem ungeraden Exponenten, oder $(-a)^{2n+1}$ (§. 72. I. Zuſ.) iſt ein Product aus n Paar poſitiven Factoren in einen negativen, mithin negativ. $(-2)^3 = -8$.

I. Zusatz: Die Wurzel mit einem geraden Exponenten aus einer positiven Größe kann positiv oder negativ seyn, z. B. $\sqrt{4} = \pm 2$.

II. Zusatz: Die Wurzel mit einem ungeraden Exponenten hat das Zeichen der Größe oder Dignität, z. B. $\sqrt[3]{+8} = +2$; $\sqrt[3]{-8} = -2$.

III. Zusatz: Aus einer negativen Größe läßt sich keine Wurzel mit einem geraden Exponenten angeben, man heißt daher solche Wurzelgrößen unmögliche, oder eingebildete Größen, z. B. $\sqrt{-4}$; $\sqrt[4]{-3}$; überhaupt: $\sqrt[2n]{-a}$, welches der allgemeine Ausdruck für unmögliche Größen ist; das heißt: -4, -3, $-a$ sind für sich wahre Größen, nur kann -4 nicht ein Quadrat, ein Product einer Zahl mit sich selbst, und -3 nicht die vierte Dignität einer Zahl, so wie überhaupt eine negative Größe $-a$ nicht eine Potenz mit einem geraden Exponenten, oder $2n$, seyn, nur als solche genommen sind sie unmögliche Größen, wird daher diese widersprechende Beziehung wieder aufgehoben, so erhält man wieder wahre Größen, so ist $\sqrt{-4} \times \sqrt{-4} = -4$.

II. Abschnitt.

Rechnungsarten mit Potenzen.

§. 101.

Erklärungen:

a. Potenzen von einerley Größen und einerley Exponenten (§. 92. I. Zus.) sind gleichartig, z. B. $3a^2$ und $5a^2$; hingegen, wenn die Größen, oder Exponenten verschieden sind, ungleichartig, z. B. $3a^2$, $2b^2$, $4a^3$.

b. Potenzen von gleichen Exponenten sind gleichnamig, z. B. a^3, b^3; mit verschiedenen Exponenten ungleichnamig, z. B. a^2, a^3.

I. Zusatz: Gleichartige Größen sind gleichnamig, aber nicht allemal umgekehrt.

II. Zusatz: Eine Größe mit dem Exponenten 1 ist die unveränderte Größe selbst, oder $a^1 = a$; der Exponent 1 drückt aus, daß nur ein Factor a vorhanden sey (§. 92. b.).

§. 102.

Aufgabe:
Potenzen zu addiren.

Auflösung:

1. Ungleichartige Potenzen schreibe man mit ihren Zeichen unverändert zusammen. (§. 37. Zus.)

2. Bey gleichartigen Potenzen mit einerley Zeichen addire man ihre Coefficienten, und setze der Summe das Zeichen der einzelnen Potenzen vor. (§. 36.)

3. Bey gleichartigen Potenzen mit verschiedenen Zeichen ziehe man den kleinern Coefficienten vom größern ab, und setze dem Reste das Zeichen des größern bey. (§. 37.)

z. B. $4\,a^2 - 3\,a^3\,b + \frac{1}{2}\,c^4 - e^n$
$3\,a^2 + a^3\,b + c^4 + f^m$

Summe $= 7\,a^2 - 2\,a^3\,b + \frac{3}{2}\,c^4 - e^n + f^m$

§. 103.

Aufgabe:
Potenzen zu subtrahiren.

Auflösung:
Man ändere im Subtrahend alle Zeichen und addire. (§. 38.)

z. B. $5\,a^3 + 3\,c^2\,m^3 - \frac{1}{3}\,r^2 + 4\,a^2$
$2\,a^3 - 2\,c^2\,m^3 + \frac{2}{3}\,r^2 - 5\,a^4$
$- \quad + \quad - \quad +$

Rest $= 3\,a^3 + 5\,c^2\,m^3 - r^2 + 5\,a^4 + 4\,a^2$

Zusatz:
Die Differenz zweyer Quadrate ist dem Producte aus der Summe ihrer Wurzeln in die Differenz derselben gleich, oder $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ eben so $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$.

§. 104.

Lehrsatz:
Potenzen von einerley Größen werden multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt; d. i.: $a^3 \times a^2 = a^5$ und überhaupt, wenn m und n ganze Zahlen sind, $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Lehr-

Beweis:

Denn $a^3 = a\,a\,a$ (§. 92.)

$a^2 = a\,a$

$a^3 \times a^2 = a\,a\,a\,a\,a = a^5$

Ueberhaupt ist $a^m = aaa\ldots m$; und $a^n = aaa\ldots n$ mithin ist $a^m \times a^n$ ein Product aus m Factoren von a, in n Factoren vom nemlichen a, mithin besteht solches aus allen a der beyden Factoren a^m und a^n, ist daher $= a^{m+n}$

I. Zusatz: Potenzen von gleichen Größen werden dividirt, wenn man vom Exponenten des Dividends jenen des Divisors subtrahirt, d. i.

$a^5 : a^2 = a^3$; und überhaupt $a^m : a^n = a^{m-n}$

Denn $a^3 \times a^2 = a^5$; und $a^{m-n} \times a^n = a^m$ (§. 43. b.)

II. Zusatz: Jede Zahl mit dem Exponenten o ist $= 1$, d. i. $x^0 = 1$; denn $x^0 = x^{1-1} = x^1 : x^1 = x : x = 1$ z. B. $5^0 = 1$; $(\frac{1}{2})^0 = 1$; $-8^0 = +1$.

III. Zusatz: Eine Potenz mit einem negativen Exponenten ist einem Bruche gleich, dessen Zähler 1, und der Nenner die nemliche Potenz mit dem positiven Exponenten ist; d. i. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Denn

$x^{-n} = x^{n-2n} = x^n : x^{2n} = x^n : x^n . x^n = 1 : x^n = \frac{1}{x^n}$

IV.

IV. Zusatz: Potenzen von einerley Größen werden nach der nemlichen Regel multiplicirt, es mögen die Exponenten das Zeichen + oder − vor sich haben, d. i. $x^{-n} \times x^{-2n} = x^{-3n}$

Denn $x^{-n} \cdot x^{-2n} = \frac{1}{x^n} \times \frac{1}{x^{2n}} = \frac{1}{x^{3n}} = x^{-3n}$

Eben so ist $x^{-3} \times x^2 = x^{-1}$

V. Zusatz: Bey der Division der Potenzen von einerley Größen macht die Verschiedenheit der Zeichen bey ihren Exponenten keine Ausnahme von der gegebenen Regel, d. i. $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$, und $a^{-m} : a^n = a^{-m-n}$

Denn

$a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \times a^n$ (§. 85. II. Zus.) $= a^{m+n}$

Eben so ist

$a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^{m+n}}$ (§. 74. VI. Zus.) $= a^{-m-n}$

§. 184.

Lehrsatz:

Eine Potenz wird zu einer verlangten Dignität erhoben, wenn man den Exponenten der Potenz mit dem Exponenten der verlangten Dignität multiplicirt, d. i.

$(a^3)^2 = a^6$; und überhaupt, wenn m und n ganze Zahlen sind, $(a^m)^n = a^{mn}$

Be-

Beweis:

$(a^3)^2 = a^3 . a^3$ (§. 92.) $= a^{3+3}$ (§. 104.) $= a^{3 \cdot 2} = a^6$

Eben so ist

$(a^m)^n = a^m . a^m . a^m \ldots . n = a^{m+m+m \ldots . n} = a^{mn}$

I. Zusatz: Umgekehrt ist $\sqrt[2]{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3$; $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$ (§. 94.); man zieht daher aus einer Potenz eine verlangte Wurzel aus, wenn man den Exponenten der Potenz mit dem Exponenten der verlangten Wurzel dividirt, giebt der Quotient keine ganze Zahl, so setzet man den Exponenten der Wurzel als Nenner unter den Exponenten der Potenz, z. B. $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; der Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$ bezeichnet also die nte Wurzel der Dignität a^m, aber auch die mte Potenz der Größe $\sqrt[n]{a}$, weil $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ ist; man nennet daher $a^{\frac{m}{n}}$ eine Potenz mit einem gebrochenen Exponenten.

II. Zusatz: Potenzen von einerley Größen mit gebrochenen Exponenten werden nach der §. 104. gegebenen Regel miteinander multiplicirt und dividirt, d. i.

$a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{r}{p}} = a^{\frac{mp+nr}{np}}$

Denn $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{r}{p}} = a^{\frac{mp}{np}} . a^{\frac{nr}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp} . a^{nr}}$ (I. Zus.)

$\sqrt[np]{a^{mp+nr}}$ (§. 104.) $= a^{\frac{mp+nr}{np}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{p}}$

Aus

Aus eben den Gründen ist

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{p}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{r}{p}} = a^{\frac{mp-nr}{np}}.$$

§. 106.

Aufgabe:

Zusammengesetzte Potenzen miteinander zu multipliciren, oder dividiren.

Auflösung:

Man verfahre ganz wie (§. 63. u. 64.), bestimme aber die einzelnen Producte und Quotienten nach §. 104.

Beyspiel der Multiplication:

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4ax - a^2 \\ 3x^2 - a^2 \\ \hline 9x^4 + 12ax^3 - 3a^2x^2 \\ - 3a^2x^2 - 4a^3x + a^4 \\ \hline \text{Product} = 9x^4 + 12ax^3 - 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 \end{array}$$

Bey-

Beyspiel der Division:

$$a^4 - b^4 \;[\; a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3$$
$$(a + b)$$
$$a^4 + a^3 b$$
$$- \quad -$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$- a^3 b - b^4$$
$$(a + b)$$
$$- a^3 b - a^2 b^2$$
$$+ \quad +$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$a^2 b^2 - b^4$$
$$(a + b)$$
$$a^2 b^2 + a b^3$$
$$- \quad -$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$- a b^3 - b^4$$
$$(a + b)$$
$$- a b^3 - b^4$$
$$+ \quad +$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$0$$

§. 107.

Lehrsatz:

Jede Potenz der Zahl 2 ist größer als die ganze Zahl, die ihren Exponenten ausdrückt, d. i. $2^m > m$

Beweis:

1. Offenbar ist $2^1 > 1$; $2^2 > 2$, $2^3 > 3$

2. Man

2. Man nehme nun an, n drücke eine ganze Zahl aus, die größer als 1, und es sey für sie $2^n > n$, so ist

wenn $2^n > n$ und $n > 1$

$2 = 2$ $n = n$.

also $2^{n+1} > 2n$ (§. 104.) $n\,2 > n + 1$

mithin $2^{n+1} > n + 1$ (§. 19. 7. Grundſ.)

3. Da nun für $n = 3$ beyde Bedingungen gelten, so ist $2^4 > 4$, und wenn man wieder $n = 4$ ſetzet, so folget $2^5 > 5$, und ſo immer für die nächſt höhere Dignität, mithin iſt allgemein $2^m > m$.

§. 108.

Lehrſatz

Jede endliche Größe a kann durch fortgeſetzte Halbierungen kleiner als jede noch ſo kleine Größe c werden, oder $\frac{a}{2^m} < c$

Beweis:

Die Größe c mag ſo klein wie immer ſeyn, ſo läßt ſich immer eine Zahl m finden, welche mit c multiplicirt ein Product giebt, welches größer als die Größe a iſt, oder: $a < m\,c$

Nun iſt $2^m > m$ (§. 107.).

Mithin $\frac{a}{2^m} < c$ (5. Grundſ. §. 44.

§. 109.

Aufgabe:

Einen Bruch z. B. $\frac{a}{b+c}$ durch fortgeſetzte Diviſion auflöſen.

Auf-

Auflösung:

Man nehme den Zähler zum Dividend, und den Nenner zum Divisor (§. 74.), und dividire nach (§. 64.), die einzelnen Quotienten und Producte bestimme man nach den einzelnen Regeln für die vorkommenden Größen, d. i.

$$
\begin{array}{l}
\frac{a}{(b+c)}\left\{\frac{a}{b}-\frac{ac}{b^2}+\frac{ac^2}{b^3}-\frac{ac^3}{b^4}\right. \\
\quad a+\frac{ac}{b} \\
\quad - \quad - \\
\hline
\qquad -\frac{ac}{b} \\
\qquad (b+c) \\
\qquad -\frac{ac}{b}-\frac{ac^2}{b^2} \\
\qquad + \quad + \\
\hline
\qquad\qquad +\frac{ac^2}{b^2} \\
\qquad\qquad (b+c) \\
\qquad\qquad +\frac{ac^2}{b^2}+\frac{ac^3}{b^3} \\
\qquad\qquad - \quad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -\frac{ac^3}{b^3} \\
\qquad\qquad\qquad (b+c) \\
\qquad\qquad\qquad -\frac{ac^3}{b^3}-\frac{ac^4}{b^4} \\
\qquad\qquad\qquad + \quad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad +\frac{ac^4}{b^4}
\end{array}
$$

I. Zu-

I. Zuſatz: $\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^4} : (b-c)$
(§. 91. II. Zuſ.)

II. Zuſatz: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \frac{x^5}{1-x}$

III. Zuſatz: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{1+x}$

IV. Zuſatz: $\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{1-1}$

V. Zuſatz: $\frac{1}{2-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} : (2-1) = 1$

VI. Zuſatz: $\frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} : (2+1) = \frac{1}{3}$

§. 110.

Erklärungen:

a. Eine Menge von Größen, deren jede nach einem allgemeinen Geſetz beſtimmet iſt, heißt eine Reihe (Series), die einzelnen Größen ihre Glieder (termini), und ein Ausdruck dieſes Geſetzes, oder jedes Gliedes, das allgemeine Glied (terminus generalis), z. B. alle im vorhergehenden §. angegebene Quotienten ſind Reihen, das Geſetz z. B. in der Reihe des II. Zuſatzes iſt: jedes Glied des Quotienten iſt eine Potenz von x, und ihr Exponent iſt allemal der Anzahl der vorhergehenden Glieder gleich, ſo iſt das 5te Glied $= x^4$, das erſte $1 = x^0$; und das allgemeine Glied $= x^{n-1}$

b. Die

b. Die Reihe heißt steigend oder divergirend, wenn die Glieder immer zunehmen, fallend, convergirend, wenn ihre Glieder immer abnehmen.

c. Wenn die Reihe aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern besteht, so heißt sie endlich (Series finita), lassen sich hingegen nie alle Glieder darstellen, so ist sie eine unendliche Reihe (Series infinita).

III. Abschnitt.

Rechnungsarten mit Wurzelgrößen.

§. 111.

Erklärung:

Ein Ausdruck $\sqrt[n]{a}$, welcher anzeiget, daß aus einer gegebenen Größe a eine bestimmte Wurzel vom Grade n gezogen werden soll, heißt eine Wurzelgröße; da die Wurzelgrößen meist Irrationalzahlen sind (§. 98), so nennet man auch gewöhnlich die Rechnung mit Wurzelgrößen die Rechnung mit Irrationalgrößen.

Zusatz:

Jede Wurzelgröße läßt sich auf den Ausdruck einer Potenz mit einem gebrochenen Exponenten bringen; und umgekehrt, d. i. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ (§. 105. I. Zus.)

§. 112.

Erklärungen:

a. Wurzelgrößen, die gleiche Größen, und gleiche Exponenten haben (§. 94. I. Zus.), heißen gleichartig, z. B.

$\sqrt[n]{x}$; $3\sqrt[n]{a}$; ferner $\frac{1}{2}\sqrt[m]{a^n}$ und $2\sqrt[m]{a^n}$, im Gegentheile ungleichartig, z. B. $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a}$.

b. Wurzelgrößen von gleichen Exponenten heißen gleichnamig, z. B. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, von verschiedenen Exponenten ungleichnamig, z. B. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[r]{a}$.

Zusatz:

Gleichartige Wurzeln sind gleichnamig, aber nicht umgekehrt.

§. 113.

Aufgabe:

Wurzelgrößen zu addiren, und zu subtrahiren.

Auflösung:

Man verfahre wie bey den Potenzen (§. 102, u. 103).

Beweis:

Wurzelgrößen lassen sich auf Potenzen reduciren (§. 111. Zus.), mithin gelten von ihnen die nämlichen Regeln, z. B.

I. $5\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{b} + \sqrt[n]{c^2} + \sqrt[m]{e}$

$2\sqrt{a} - 5\sqrt[3]{b}\sqrt[n]{-}\sqrt[n]{d} + \sqrt{e}$

Summe $= 7\sqrt{a} - 8\sqrt[3]{b} + \sqrt[n]{c^2} - \sqrt[n]{d} + \sqrt[m]{e} + \sqrt{e}$

II. $5\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{b} + \sqrt[n]{c^2} + \sqrt[m]{e}$

$2\sqrt{a} - 5\sqrt[3]{b} - \sqrt[n]{d} + \sqrt[m]{e}$

$- \quad + \quad + \quad -$

Rest $= 3\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{b} + \sqrt[n]{c^2} + \sqrt[m]{d} + \sqrt[m]{e} - \sqrt{g}$

§. 114.

Aufgabe:

Gegebene Wurzelgrößen gleichnamig zu machen.

Auflösung:

1. Man bringe die gegebenen Wurzelgrößen auf den Ausdruck von Potenzen mit gebrochenen Exponenten (§. 111. Zus.)
2. bringe diese Exponenten unter einerley Benennung (§. 80.)
3. setze die Zähler als Exponenten Rechts ober die Größen und
4. den gemeinschaftlichen Nenner in das Wurzelzeichen.

z. B. Man soll $\sqrt{a}$ und $\sqrt[n]{b^3}$ gleichnamig machen, so ist

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[n]{b^3} = b^{\frac{3}{n}}$ N. 1.

$\frac{1}{2}, \frac{3}{n} = \frac{n}{2n}, \frac{6}{2n}$ N. 2.

$\sqrt{a} = a^{\frac{n}{2n}} = \sqrt[2n]{a^n}$; $\sqrt[n]{b^3} = b^{\frac{6}{2n}} = \sqrt[2n]{b^6}$ N. 3. u. 4.

§. 115.

Aufgabe:

Wurzelgrößen miteinander zu multipliciren.

Auflösung:

1. Sind die Wurzelgrößen gleichnamig, so multiplicire man die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen mit einander.

2. Sind sie ungleichnamig, so mache man sie gleichnamig und verfahre wie vorher.

z. B. $\sqrt{a} \times \sqrt{c} = \sqrt{ac}$; $\sqrt[n]{3a} \times \sqrt[n]{2c} = \sqrt[n]{6ac}$.

Beweis:

$\sqrt{a} \times \sqrt{c} = a^{\frac{1}{2}} \times c^{\frac{1}{2}} = (ac)^{\frac{1}{2}}$ (§. 96) $= \sqrt{ac}$

Eben so ist

$\sqrt[n]{3a} \times \sqrt[n]{2c} = 3a^{\frac{1}{n}} \times 2c^{\frac{1}{n}} = 6a^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{n}} = 6(ac)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{6ac}$

Die Regel für Nro. 2. bedarf keines eigenen Beweises.

§. 116. Aufgabe:

Wurzelgrößen mit einander zu dividiren.

Auflösung:

1. Sind die Wurzelgrößen gleichnamig, so dividire man die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen mit einander.

2. Sind sie ungleichnamig, so mache man sie gleichnahmig, und verfahre wie vorher.

d. i. $\sqrt[n]{6a} : \sqrt[n]{3b} = \sqrt[n]{\frac{6}{3}}$

Beweis:

$\sqrt[n]{6a} : \sqrt[n]{3b} = 6a^{\frac{1}{n}} : 3b^{\frac{1}{n}} = 2\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = 2\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Für den 2ten Fall bedarf die angegebene Regel keines eigenen Beweises.

§. 117.

§. 117.

Aufgabe:

Zusammengesetzte Wurzelgrößen mit einander zu multipliciren, oder zu dividiren.

Auflösung:

Man verfahre ganz wie §. 63. und 64, bestimme aber die Größe der einzelnen Quotienten und Produkte aus §. 115 und 116.

I. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
$\sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\sqrt{9} + \sqrt{6}$
$-\sqrt{6} - \sqrt{4}$

Product: $\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$

II. $48 - \sqrt{1280} - \sqrt{1620} + 30$ $\left\{\begin{matrix} 6 - \sqrt{20} \\ :(8 - \sqrt{45}) \end{matrix}\right.$
$48 - \sqrt{1620}$

$-\sqrt{1280} + 30$
$(8 - \sqrt{45})$
$-\sqrt{1280} + 30$

Anmerkung: In dem Beyspiel der Division, wo ganze Zahlen mit Wurzelgrößen multiplicirt und dividirt werden sollen, muß man erst die ganze Zahl zur Dignität der Wurzel erheben, und das Wurzelzeichen vorsetzen, so ist $6 = \sqrt{36}$; $8 = \sqrt{64}$; dann wird nach den gegebenen Regeln verfahren.

§. 118.

Aufgabe:

Eine Wurzelgröße zu einer beliebigen Dignität zu erheben.

Auflösung:

Man erhebe die Größe nach dem Wurzelzeichen zu verlangten Dignität D. i. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Beweis:

$(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m$ (§. 111. Zuſ.) $= a^{\frac{m}{n}}$ (§. 105.) $= \sqrt[n]{a^m}$.

§. 119.

Aufgabe:

Aus einer Wurzelgröße eine beliebige Wurzel auszuziehen.

Auflösung:

Man multiplicire die Exponenten der Wurzeln mit einander. D. i. $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[mn]{a}$

Beweis:

$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[m]{(a^{\frac{1}{n}})} = a^{\frac{1}{m.n}}$ (§. 105. I. Zuſ.) $= \sqrt[mn]{a}$

IV. Abſchnitt.

Von dem Quadrate und der Quadratwurzel vieltheiliger Größen.

§. 120.

Lehrſatz.

Das Quadrat einer zweytheiligen Größe beſteht aus dem Quadrate des erſten Theiles, dem doppelten Pro-

Producte des ersten in den zweyten Theil, und aus dem Quadrate des zweyten Theiles. D. i.

I $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, und II $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Beweis: I. $a+b$ / $a+b$ / a^2+ab / $+ab+b^2$ / $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

II. $a-b$ / $a-b$ / a^2-ab / $-ab+b^2$ / $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

I. Zusatz. Die Formel II läßt sich aus I unmittelbar finden, wenn man b als eine negative Größe setzet, das ist, aus der ersten Formel läßt sich sowohl die Summe als die Differenz zweyer Größen, ohne dieselbe erst mit sich selbst zu multipliciren (§. 92.), quadriren, oder

$(12)^2 = (10+2)^2 = 100 + 40 + 4 = 144;$
$8^2 = (10-2)^2 = 100 - 40 + 4 = 64$

II. Zusatz. Drey und mehrtheilige Größen lassen sich nach der nemlichen I. Formel quadriren, wenn man anfangs die ersten zwey Theile nach der obigen Formel quadrirt, dann das ganze gefundene Quadrat als das Quadrat von a der Formel nimmt, und den folgenden 3ten Theil für b setzet, und wieder $2ab+b^2$ bestimmt, ferner aufs neue das ganze bisher gefundene $= a^2$ der Formel setzet, und so wieder fortfährt;

Denn $(p+q+r)^2 = p^2 + 2pq + q^2 + 2pr + 2qr + r^2$
$= (p^2 + 2pq + q^2) + 2(p+q)r + r^2$
$= (p+q)^2 + 2(p+q)r + r^2$

Eben

Eben so ist:

$$(p+q+r+s)^2 = p^2+2pq+q^2+2pr+2qr+r^2 +2ps+2qs+2rs+s^2$$
$$= (p^2+2pq+q^2)+2(p+q)r+r^2 +2(p+q+r)s+s^2$$

III. Zusatz. Wenn man aus einer mehrtheiligen Größe A die Quadratwurzel ziehen soll, so muß sie unter der ersten Formel enthalten seyn, das ist, in ihr müssen alle Theile der Formel gegeben seyn; wenn dieses statt hat, so heißt die Größe A ein vollkommenes Quadrat, im Gegentheil ein unvollkommenes.

§. 121.

Aufgabe:

Aus vieltheiligen Größen in der Buchstabenrechnung die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung:

1. Man ordne die Buchstaben nach einer in selben befindlichen Potenz, so, daß ihr Quadrat den ersten Platz, die einfache Größe den zweyten erhält, an die dritte Stelle setze man jenen Theil, wo sie nicht mehr vorkömmt.

2. Aus der an die erste Stelle gesetzten Größe ziehe man die Quadratwurzel aus, nehme sie für a im Formular I. §. 120, und subtrahire ihr Quadrat.

3. Den Rest dividire man mit 2a, d. i. mit dem Duplo der gefundenen Wurzel, der gefundene Quotient wird als der zweyte Theil b der Wurzel angesetzt, und zugleich neben dem Divisor hingeschrieben.

Nun

4. Nun multiplicire man mit ſolcher die Summe $= 2a + b$ ſo bekömmt man $2ab + b^2$ des Formulars, ziehe das Product ab; Iſt dadurch die gegebene Größe völlig erſchöpfet, ſo enthalten die gefundenen zwey Theile die geſuchte Wurzel.

5. Bleibt aber ein Reſt, ſo nehme man die gefundenen zwey Theile der Wurzel für den erſten Theil des Formulars $= a$ (§. 120. II. Zuſ.) und ſuche nach Nrs. 3. 4. den folgenden Theil, und im Falle abermal ein Reſt bleibt, ſo nehme man alle drey gefundene Theile der Wurzel für a der Formel, und ſetze ſo das Verfahren immer fort.

6. Im Falle die gegebenen Größen kein vollkommenes Quadrat enthalten (§. 120. III. Zuſ.) ſo nähert man ſich durch Nro. 5. der wahren Wurzel zwar, aber man kann ſie nie erſchöpfen, mithin muß die Natur der gegebenen Größen entſcheiden, wie weit man dieſe Annäherung fortſetzen ſoll.

I. Beyſpiel. $4c^2 + 4cd + d^2 \left\{ \begin{matrix} (a+b) \\ 2c+d \end{matrix} \right.$

$(a^2) = 4c^2$

$+ 4cd + d^2$

$(2a+b) = (4c+d)$

$(2ab + b^2) = + 4cd + d^2$

Mithin $\sqrt{(4c^2 + 4cd + d^2)} = 2c + d$.

II. Beyſpiel:

$$\tfrac{1}{4}a^2 - ae + e^2 + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2} \Big\{ \tfrac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a}$$

$$(a^2) = \tfrac{1}{4}a^2$$

$$- ae + e^2 + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$

$$(2a + b) = (a - e)$$

$$(2ab + b^2) = - ae + e^2$$

$$+ \quad -$$

$$2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$

$$(2a + b) = (a - 2e + \frac{2ex}{a})$$

$$(2ab + b^2) = + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$

Folglich iſt

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ae + e^2 + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2})} = \tfrac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a}$$

§. 122.

Lehrſatz:

Die Anzahl der Ziffern, woraus die Quadratzahl beſteht, iſt

I. nie größer, als die doppelte Anzahl n der Ziffern der Wurzel, z. B. beſteht eine Zahl aus drey Ziffern, ſo hat ihr Quadrat höchſtens 6 Ziffern.

II. nie kleiner, als die doppelte Anzahl dieſer Ziffern, weniger Eins; d. i. das Quadrat einer Zahl von 3 Ziffern, hat wenigſtens 5 Ziffern.

Beweis

Beweis von I.

1. Wenn man der Zahl 1 so viele Nullen anhängt, als eine andere Zahl Ziffern hat, so ist erstere allemal grösser, d. i.

$10 > 8$ mithin auch (2 Grundſ. §. 95.)

$100 > 97$ $\quad 100 > 8^2$

$1000 > 978$ $\quad 10000 > 97^2$

$1000000 > 978^2$

2. Nun ist 100 die kleinste Zahl mit 3 Ziffern, folglich kann 8^2, oder überhaupt das Quadrat einer Ziffer nur aus zweyen bestehen, sonst wäre $8^2 =$ oder > 100.

Eben so ist 10000 die kleinste Zahl von 5 Ziffern, daher kann 97^2 oder jedes Quadrat zweyer Ziffer höchstens 4 Ziffern enthalten;

Und 1000000 ist die kleinste Zahl von 7 Ziffern, mithin enthält 978^2 oder das Quadrat dreyer Ziffern höchstens 6 Ziffern.

3. Dieser bisher aus Induction geführte Beweis läßt sich allgemein machen:

Es bestehe eine Zahl aus n Ziffern oder $= 978.....n$

so ist 1 mit n angehängten Nullen grösser; d. i.

10^n (§. 92. IV. Zuſ.) $> 978.....n$, mithin auch

10^{2n} (§. 105.) $> (978.....n)^2$

Die Zahl 10^{2n} ist die kleinste mit $2n+1$ Ziffern, folglich kann das Quadrat $(978....n)^2$, d. i. von n Ziffern höchstens 2n Ziffern enthalten; sonst müßte solches $=$ oder $> 10^{2n}$ seyn, welches unmöglich ist.

Beweis

Beweis von II.

1. Unter Zahlen, die gleichviele Ziffern haben, ist immer jene die kleinste, wo nach 1 lauter Nullen folgen. D. i.

$1 < 4$ mithin auch $1 < 4^2$

$10 < 23$ $100 < 23^2$

$100 < 253$ $1000 < 253^2$

2. Da nun 1 die kleinste Zahl mit einem Ziffer, 100 die kleinste mit 3 Ziffern, 1000 die kleinste mit 4 Ziffern ist, so kann 4^2 nicht weniger Ziffern als eines, 23^2 nicht weniger als 3, und 253^2 nicht weniger als 5 Ziffern haben, mithin geben die Zahlen mit einem zwey oder drey Ziffern im Quadrate nie weniger Ziffern als das Duplum um Eins vermindert.

3. Ueberhaupt ist $10^{n-1} < 235 \ldots\ldots n$

mithin auch $10^{2n-2} < (235 \ldots\ldots n)^2$

Nun ist aber 10^{2n-2} die kleinste Zahl von $2n - 1$ Ziffern, folglich kann $(235 \ldots\ldots n)^2$ das Quadrat jeder Zahl nicht weniger als $2n-1$, d. i. die doppelte Anzahl der Ziffern weniger Eins ihrer Wurzel enthalten.

Zusatz:

Wenn man eine gegebene ganze Zahl von der Rechten zur Linken in Classen zu zwey Ziffern theilet, so enthält ihre Quadratwurzel so viele Ziffern, als man Classen bekömmt; denn man erhalte n Classen, so besteht die gegebene Zahl aus $2n$ oder $2n-1$ Ziffern, je nachdem für die höchste Classe zwey oder nur eine Ziffer trifft, mithin ist die Anzahl der Ziffern für die Wurzel allemal n.

§. 123.

Lehrſatz:

Wenn eine ganze Zahl, aus der man die Quadratwurzel ziehen ſoll, aus drey oder mehrern Ziffern beſteht, ſo iſt

I. Das niedrigſte Ziffer vom Quadrate des erſten Theiles der Wurzel oder a^2 im letzten Ziffer der erſten Claſſe; (von der Linken zur Rechten gezählet) vom doppelten Producte des erſten in den zweyten oder folgenden Theil, oder $2ab$ im erſten Ziffer der nächſtfolgenden Claſſe, vom Quadrate dieſes Theiles oder b^2 im letzten Ziffer dieſer Claſſe enthalten.

II. Nimmt man die zwey gefundenen Theile als einen oder für a, ſo iſt wieder das niedrigſte Ziffer vom Duplo deſſelben in den folgenden Theil der Wurzel, oder $2ab$ im erſten Ziffer der folgenden Claſſe, und vom Quadrate dieſes Theiles oder b^2 im letzten Ziffer dieſer Claſſe enthalten.

III. Ueberhaupt, wenn man die bisher gefundenen Theile für einen Theil $= a$ nimmt, ſo iſt das niedrigſte Ziffer vom doppelten Producte dieſes Theiles in den folgenden Theil oder $2ab$ im erſten, und vom Quadrate dieſes Theiles, oder b^2 allemal im letzten Ziffer der folgenden Claſſe enthalten.

Beweis von I. Wenn die gegebene Zahl $m+1$ Claſſen enthält, ſo beſteht die Quadratwurzel aus eben ſo vielen Ziffern (§. 122. Zuſ.), man bezeichne das erſte Ziffer mit f, das folgende mit g, aber ohne ihren

ren Localwerth dadurch auszudrücken, so ist $a = f.10^m$; und $b = g.10^{m-1}$; folglich $a^2 = f^2.10^{2m}$, $2ab = 2fg.10^{2m-1}$, $b^2 = g^2.10^{2m-2}$; das ist: das Quadrat des ersten Theiles der Wurzel besteht aus der Quadratzahl des Ziffers f ohne Localwerth betrachtet, das niedrigste Ziffer aber davon ist schon von der Ordnung 2m, oder von der Ordnung des letzten Ziffers der höchsten Classe, denn nach selber folgen ebenfalls m Classen oder 2m Ziffern; das niedrigste Ziffer von 2ab ist von der Ordnung 2m—1, mithin jener des ersten Ziffers der folgenden Classe; hingegen ist das niedrigste Ziffer von b^2 von der Ordnung 2m—2, mithin von der nemlichen wie das letzte Ziffer dieser folgenden Classe.

Beweis von II. Setzet man wieder die zwey gefundenen Theile $= a$ (§. 120. II. Zus.); und wiefern sie bloß aus Ziffern bestehen $= h$, das Ziffer vom folgenden Theile b aber $= i$; so ist wieder $a = h.10^{m-1}$ und $b = i.10^{m-2}$; mithin $2ab = 2hi.10^{2m-3}$ und $b^2 = i^2.10^{2m-4}$, d. i. das doppelte Product der beyden ersten Theile in den folgenden Theil der Wurzel hat sein niedrigstes Ziffer im ersten, und das Quadrat dieses neuen Theiles in dem letzten Ziffer dieser Classe.

Beweis von III. Nimmt man nun überhaupt (§. 120. II. Zus.) die bisher gefundenen Theile der Wurzel zusammen als einen $= a$, so ist das niedrigste Ziffer davon von der sovielten Ordnung, als noch Classen vor-

vorhanden sind, z. B. n, mithin $a = p \cdot 10^n$, und der folgende Theil $b = q \cdot 10^{n-1}$, folglich $a^2 = p^2 \cdot 10^{2n}$; und $2ab = 2pq\ 10^{2n-1}$; $b^2 = q^2\ 10^{2n-2}$; das ist, das doppelte Product aller bisher gefundenen Theile in den folgenden hat allemal in dem ersten Ziffer, und das Quadrat dieses Theiles in dem letzten Ziffer der folgenden Classe seine niedrigste Stelle.

§. 124.

Aufgabe:

Aus einer ganzen Zahl von 3 oder 4 Ziffern die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur linken Seite in Classen zu zwey Ziffern (§. 122. Zus.), so enthält die Wurzel zwey Ziffern; weil man zwey Classen bekömmt.

2. Man nehme aus der Tabelle §. 93. jenes Quadrat, welches der Zahl von der ersten Klasse links gezählet entweder gleich oder zunächst kleiner ist, schreibe solches unter die die erste Classe, und die in der Tabelle in der ersten Reihe treffende Zahl als Wurzel wie bey dem Quotienten an, so ist die erstere a^2, letztere a (§. 120.); ferner ziehe man das gefundene Quadrat von den Ziffern der ersten Classe ab. (§. 123. 1.)

3. Zu dem Rest schreibe man die folgende Classe, setze das letzte Ziffer vom Duplo des gefundenen ersten Theiles der Wurzel unter das erste Ziffer der neuen Classe, und dividire damit, schreibe den Quotienten,

als den zweyten Theil neben dem ersten gefundenen, und zugleich unter das letzte Ziffer der neuen Classe;

4. Multiplicire mit eben diesem zweyten Theil, sowohl den doppelten ersten um 2ab, als den zweyten selbst um b^2 (§. 120.) zu bekommen, so erhalten beyde Producte zugleich ihre treffende Stellen. (§. 123. I.)

5. Ziehe endlich diese Producte ab, bleibt kein Rest, so ist die Wurzel ausgezogen. (§. 120.)

I. Beyspiel.

$$\begin{array}{r|l} & a+b \\ 5|76 & 24 \\ a^2 = 4 & \\ \hline 176 & \\ (2a+b) = 44 & \\ 2ab+b^2 = 176 & \\ \hline - & \end{array}$$

II. Beyspiel.

$$\begin{array}{r|l} 34|81 & 59 \\ a^2 = 25 & \\ \hline 981 & \\ (2a+b) = 109 & \\ 2ab+b^2 - 981 & \\ \hline - & \end{array}$$

Mithin ist $\sqrt{576} = 24$; und $\sqrt{3481} = 59$.

§. 125.

Aufgabe:

Aus einer ganzen Zahl von einer beliebigen Anzahl Ziffern die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Classen zu zwey Ziffern, so besteht die Wurzel aus so vielen Ziffern, als man Classen hat (§. 122. Zus.)

2. Man

2. Man bestimme aus der ersten und zweyten höchsten Classe nach §. 124. die ersten zwey Ziffern der Wurzel.

3. Zu dem Reste setze man die folgende Classe, betrachte die beyden Ziffern der Wurzel als den ersten Theil, so enthält der Rest sammt der neuen Classe das doppelte Produkt dieses Theiles in den folgenden, und das Quadrat des folgenden Theiles (§. 123. II.) man schreibe also das Doppelte der bisher gefundenen Wurzel als Divisor so an, daß sein niedrigstes Ziffer unter dem ersten Ziffer der neuen Classe zu stehen kömmt, und bestimme wieder nach (§. 124. N. 3—5) den folgenden Theil der Wurzel.

4. Zu dem bleibenden Reste setze man wieder die folgende Classe (§. 123. III.) und verfahre auf die nemliche Art.

5. Diese Operation wird so lange fortgesetzet, bis man alle Classen der gegebenen Zahl erschöpfet hat.

6. Ist an irgend einer Stelle der Rest sammt der folgenden Classe kleiner als die Zahl die man erhält, wenn man den Ziffern vom Duplo der bisher gefundenen Wurzel am Ende 1 beygefügt, so setze man in die Wurzel dafür 0, füge sogleich dem Reste die der nachfolgenden Classe bey, und verfahre wieder nach N. 3.

I. Beyspiel.

$$
\begin{array}{rl}
 & 7\ 3 \mid 2\ 7 \mid 3\ 6 \left\{ 8\ 5\ 6 \right. \\
a^2 = & 6\ 4 \\
\hline
 & 9\ 2\ 7 \\
(2a+b) = & 1\ 6\ 5 \\
2ab+b^2, = & 8\ 2\ 5 \\
\hline
 & 1\ 0\ 2\ 3\ 6 \\
(2a+b) = & 1\ 7\ 0\ 6 \\
2ab+b^2 & 1\ 0\ 2\ 3\ 6 \\
\hline
 & -
\end{array}
$$

II. Beyspiel.

$$
\begin{array}{rl}
 & 3\ 3 \mid 0\ 3 \mid 9\ 5 \mid 0\ 4 \left\{ 5\ 7\ 4\ 8 \right. \\
a^2 = & 2\ 5 \\
\hline
 & 8\ 0\ 3 \\
(2a+b) = & 1\ 0\ 7 \\
2ab+b^2 = & 7\ 4\ 9 \\
\hline
 & 5\ 4\ 9\ 5 \\
(2a+b) = & 1\ 1\ 4\ 4 \\
2ab+b^2 = & 4\ 5\ 7\ 6 \\
\hline
 & 9\ 1\ 9 \\
 & 9\ 1\ 9\ 0\ 4 \\
(2a=b) = & 1\ 1\ 4\ 8\ 8 \\
2ab=b^2 = & 9\ 1\ 9\ 0\ 4 \\
\hline
 & -
\end{array}
$$

Folglich ist $\sqrt{732736} = 856$; $\sqrt{33039504} = 5748$

I. Zusatz

~~$\sqrt{961504803} =$~~

$\sqrt{974169} = 987$ $\sqrt{25856961601} = 160801$

$\sqrt{942841} = 971$

$\sqrt{571536} = 756$

$\sqrt{381924} = 618$

$\sqrt{1535667993376} = 391876$

I. Zuſatz. Wenn man aus einer gegebenen ganzen Zahl A die Quadratwurzel zieht, ſo giebt das Product der gefundenen Wurzel n mit ſich ſelbſt oder n^2, und im Falle ein Reſt R bleibt, die Summe derſelben die gegebene Zahl wieder, oder $A = n^2 + R$; denn beym Ausziehen der Quadratwurzel hat man von A nach und nach alle Theile des Quadrates der gefundenen Wurzel ſubtrahirt, d. i. $A - n^2 = R$; mithin iſt $A = n^2 + R$ (§ 29. I. Zuſ.)

II. Zuſatz: Wenn die gefundene Zahl n die Quadratwurzel aus A ſeyn ſoll, ſo muß der Reſt R kleiner als das um 1 vermehrte Duplum der Zahl n ſeyn, oder $R < 2n + 1$; denn $A = n^2 + R$; wäre nun $R = 2n + 1$; ſo ſo müßte

$A = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ ſeyn; mithin $\sqrt{A} = n + 1$ (§. 94. 2.); dieſes folget um ſo mehr, wenn $R > 2n + 1$ ſeyn ſollte.

III. Zuſatz: Wenn beym Ausziehen der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl A ein Reſt bleibt, ſo iſt die Quadratwurzel oder $\sqrt{A}$ eine Irrationalzahl (§. 98. Zuſatz).

§ 126.

Aufgabe:

Aus einer ganzen Zahl, deren Quadratwurzel keine ganze Zahl, mithin eine Irrationalzahl iſt, dieſe Wurzel durch Annäherung zu beſtimmen.

Auflösung:

Man hänge der gegebenen Zahl A so viele Paare Nullen an, als man Decimalstellen von der Wurzel verlangt, und verfahre nun wie mit ganzen Zahlen; am Ende aber setze man in der gefundenen Wurzel von der Rechten zur Linken das Comma nach so vielen Ziffern, als man Paare von Nullen beygefüget hat.

Beweis:

Hat man ein Paar Nullen genommen, so ist offenbar $\sqrt{A} = \sqrt{\frac{A.100}{100}} = \frac{\sqrt{A.100}}{10}$, das ist, man kann aus dem Zähler, oder aus der um zwey Nullen vermehrten Zahl wie aus einer ganzen Zahl die Wurzel ziehen, nur muß man am Ende die Einheit mit halb so viel Nullen in den Nenner setzen, oder in der gefundenen Wurzel so viele Decimalstellen abschneiden, als man Paare von Nullen der Zahl A anhieng (§. 87. II. Zus.)

Allgemein ist $\sqrt{A} = \sqrt{\frac{A.10^{2n}}{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{A.10^{2n}}}{10^n}$ (§. 97. I. Zus. §. 105. I. Zus.)

Bey-

Beyspiel: 3 [1, 7 3 2 0 5 0 8

```
 1
 ---
 2 0 0
   2 7
 1 8 9
 -----
   1 1 0 0
     3 4 3
   1 0 2 9
   -------
       7 1 0 0
       3 4 6 2
       6 9 2 4
       -------
         1 7 6 0 0 0 0
           3 4 6 4 0 5
         1 7 3 2 0 2 5
         -------------
             2 7 9 7 5 0 0 0 0
               3 4 6 4 1 0 0 8
             2 7 7 1 2 8 0 6 4
             -----------------
                 2 6 2 1 9 3 6
```

Mithin ist die Wurzel 3 = 1, 7 3 2 0 5 0 8 . . . . .

Zusatz: Wenn man aus einem gegebenen Decimalbruche die Quadratwurzel ausziehen soll, so verfährt man wie bey ganzen Zahlen, nur muß man allemal die Abtheilung der Ziffern in Classen vom Comma anfangen, und im Falle die Anzahl der Decimalstellen ungerade ist, durch eine beygesetzte 0 gerade machen, z. B. 246,325 = 246,3250 setzen (§. 87. III. Zus.), so daß für jede Classe zwey Decimalen vorhanden sind; endlich werden am Ende in der gefundenen Wurzel so viele Decimalen abgeschnitten, als Classen derselben der gegebene Bruch enthalt. Z. B. $\sqrt{6,3504} = 2,52$; $\sqrt{0,000025} = 0,005$.

V. Abschnitt.

Vom Cubus und der Cubikwurzel vieltheiliger Größen.

§. 127.

Lehrsatz:

Der Cubus einer zweytheiligen Größe besteht aus dem Cubus des ersten Theiles, dem dreyfachen Producte vom Quadrate des ersten in den zweyten Theil, dem dreyfachen Producte des ersten in das Quadrat des zweyten Theiles, dem Cubus des zweyten Theiles, d. i.

I. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

II. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Beweis 1.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (§. 120.)

$a+b = a+b$

$a^3 + 2a^2b + ab^2$

$+ a^2b + 2ab^2 + b^3$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (§. 92.)

Eben so ist II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a-b = a-b$

$a^3 - 2a^2b + ab^2$

$- a^2b + 2ab^2 - b^3$

Folglich $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

I. Zusatz:

I. Zusatz: Die Formel II. läßt sich aus I. unmittelbar finden, wenn man in selber den zweyten Theil negativ nimmt, mithin läßt sich eine Summe sowohl, als die Differenz zweyer Größen zum Cubus erheben, ohne daß man sie mit sich selbst dreymal multipliciren muß, z. B.

$(12)^3 = (10+2)^3 = 1000+600+120+8 = 1728$

$(8)^3 = (10-2)^3 = 1000-600+120-8 = 512$

II. Zusatz: Drey und mehrtheilige Größen lassen sich nach dem nemlichen I. Formular zum Cubus erheben; denn

$$\begin{aligned}(p+q+r)^3 &= p^3+3p^2q+3pq^2+q^3+3p^2r+6pqr+\\ &\quad 3q^2r+3pr^2+3qr^2+r^3\\ &= (p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)+(3p^2r+\\ &\quad 6pqr+3q^2r)+(3pr^2+3qr^2)+r^3\\ &= (p+q)^3+3(p+q)^2r+3(p+q)r^2+r^3\end{aligned}$$

Man erhebe nemlich die ersten zwey Theile der gegebenen Größe nach dem I. Formular zum Cubus, nehme die beyden ersten Theile zusammen, oder setze $p+q=z$; so ist $(p+q)^3=z^3$; man bestimme also aufs neue $3a^2b+3ab^2+b^3$. Hat die Größe noch mehrere Theile, so verfahre man immer auf die nemliche Art.

III. Zusatz: Soll man aus einer gegebenen mehrtheigen Größe A die Cubikwurzel ziehen, so muß sie unter dem Formular I. enthalten seyn, mithin alle ihre Theile begreiffen, ist nun die Größe A so beschaffen, so heißt sie ein **vollkommener Cubus**, im Gegentheile ein **unvollkommener**.

§. 128.

§. 128.

Aufgabe:

Aus mehrtheiligen Größen in der Buchstabenrechnung die Cubikwurzel auszuziehen.

Auflösung:

1. Man ordne die Theile nach einer Größe so, daß ihr Cubus am ersten, das Quadrat am zweyten, die einfache Größe am dritten, jene Theile, wo diese Größe nicht mehr vorkömmt, am vierten Platze zu stehen kommen.

2. Man ziehe von der Größe an der ersten Stelle die Cubikwurzel aus, setze solche als den ersten Theil $= a$, und ziehe den Cubus dieser gefundenen Größe ab.

3. Nun nehme man das dreyfache Quadrat des gefundenen ersten Theiles oder $3a^2$, und dividire mit solchem den Rest, so ist der Quotient der 2te Theil b der Cubikwurzel.

4. Mit diesem Quotienten multiplicire man das dreyfache Quadrat des ersten Theiles, um $3a^2b$ zu bekommen, ferner nehme man das Quadrat des zweyten in den dreyfachen ersten Theil oder $3ab^2$, endlich den Cubus des zweyten Theiles oder b^3, und subtrahire die Summe derselben vom obigen Reste, hebt sich nun alles auf, so sind die zwey gefundenen Größen a und b die Cubikwurzel.

5. Bleibt aber ein Rest, so nehme man die beyden gefundenen Theile für einen $= a$; wiederhole das Verfahren

fahren von N. 3 und 4 (§. 127. II. Zus.), dieses setze man so lange fort, bis alle Theile der gegebenen Größe erschöpfet sind.

6. Enthielte die gegebene Größe keinen vollkommenen Cubus, so suche man sich durch das Verfahren N. 5. der wahren Wurzel so weit zu nähern, als es die Umstände erheischen.

I. Beyspiel.

$$27c^3+54c^2d+36cd^2+8d^3 \;\Big\{\; 3c+2d$$

$a^3 = 27c^3$

$3a^2 = (27c^2)$

$3a^2b = 54c^2d$

$3ab^2 = +36cd^2$

$b^3 = +8d^3$

$3a^2b+3ab^2+b^3 = 54c^2d+36cd^2+8d^3$

Folglich ist $\sqrt[3]{(27c^3+54c^2d+36cd^2+8d^2)} = 3c+2d$

II. Beyspiel.

$$8x^6+12x^5-30x^4-35x^3+45x^2+27x-27 \;\Big|\; 2x^2+x-3$$

$a^3 = 8x^6$

$3a^2 = (12x^4)$

$3a^2b = 12x^5$

$3ab^2 = +6x^4$

$b^3 = +x^3$

$3a^2b+3ab^2+b^3 = 12x^5+6x^4+x^3$

$-36x^4-36x^3+45x^2+27x-27$

$-36.$

$$-36x^4-36x^3+45x^2+27x-27$$

$3a^2 = (12x^4+12x^3+3x^2$

$3a^2b = -36x^4-36x^3-9x^2$

$3ab^2 = +54x^2+27x$

$b^3 = -27$

mithin

$3a^2b+3ab^2+b^3 = -36x^4-36x^3+45x^2+27x-27$

$+\quad +\quad -\quad -\quad +$

Folglich ist

$\sqrt[3]{(8x^6+12x^5-30x^4-35x^3+45x^2+27x-27)} = 2x^2+x-3$

§. 129.

Lehrsatz:

Die Anzahl der Ziffern im Cubus ist

I. nie größer als die dreyfache Anzahl der Ziffern der Wurzel, und

II. nie kleiner als diese dreyfache Anzahl weniger zwey.

Beweis von I.

1. Es ist offenbar (§. 122. I.)

$10 > 8$	mithin	$1000 > 8^3$
$100 > 89$		$1000000 > 89^3$
$1000 > 879$		$1000000000 > 879^3$

2. Da nun 1000 die kleinste Zahl mit vier Ziffern ist, so kann 8^3 oder der Cubus eines Ziffers nicht mehr als drey Ziffern haben; eben so kann 89^3 oder der Cubus einer Zahl von zwey Ziffern höchstens sechs Ziffern

fern, und 879^3 oder der Cubus von einer Zahl mit drey Ziffern höchstens 9 Ziffern haben, mithin die dreyfache Anzahl nicht übersteigen.

3. Allgemein ist:

$10^n > 873 \ldots . n$ mithn $10^{3n} > (873 \ldots . n)^3$

Nun ist 10^{3n} die kleinste Zahl mit $3n+1$ Ziffern, folglich wenn die Wurzel n Ziffern hat, so kann der Cubus davon höchstens 3n Ziffern, oder die dreyfache Anzahl enthalten.

Beweis von II.

$1 < 3$ folglich $1 < 3^3$
$10 < 23$ $1000 < 23^3$
$100 < 232$ $1000000 < 232^3$

2. Da nun 1 die kleinste Zahl mit einem Ziffer, 1000 die kleinste Zahl mit 4 Ziffern, 1000000 die kleinste mit 7 Ziffern ist, so kann 3^3 oder der Cubus einer Ziffer nicht weniger als 3—2, das ist, ein Ziffer; 23^3 oder der Cubus 2 von zwey Ziffern nicht weniger als 6—2, das ist, vier Ziffern, und 232^3 oder der Cubus einer Zahl von 3 Ziffern nicht weniger als 9—2 das ist, sieben Ziffern haben.

3. Allgemein ist

$10^{n-1} < 232 \ldots . n$, also $10^{3n-3} < (232 \ldots . n)^3$

Da aber 10^{3n-3} die kleinste Zahl von 3n—2 Ziffern ist, so muß $(232 \ldots . n)^3$ oder der Cubus einer Zahl von n Ziffern wenigstens 3n—2 Ziffern enthalten.

Zusatz:

Zusatz:

Wenn man eine gegebene ganze Zahl von der Rechten zur Linken in Classen zu drey Ziffern theilet, da also die erste Classe ~~Rechts~~ Linke drey, zwey, oder auch nur ein Ziffer haben kann, so besteht die Cubikwurzel aus so vielen Ziffern, als man Classen hat; denn die Zahl enthalte n Classen, so besteht sie aus $3n$, oder $3n-1$, oder $3n-2$ Ziffern, in allen drey Fällen ist die Anzahl der Ziffern der Cubikwurzel n, so groß nemlich als die Anzahl der Classen.

§. 130.

Lehrsatz:

Wenn eine ganze Zahl, aus der man die Cubikwurzel ziehen soll, aus 4 oder mehrern Ziffern besteht, so ist, wenn man sie in Classen (§. 129. Zus.) theilet, und sie sowohl als die Ziffern von der Linken zur Rechten zählet,

I. das letzte Ziffer vom Cubus des ersten Theiles der Wurzel oder a^3 im letzten Ziffer der ersten Classe, jenes von $3a^2b$ im ersten, von $3ab^2$ im zweyten, und von b^3 im letzten Ziffer der folgenden Classe enthalten.

II. Setzet man die beyden gefundenen ersten Theile der Wurzel $= a$ (§. 127. II. Zus.), so ist wieder das letzte Ziffer von $3a^2b$ im ersten, von $3ab^2$ im zweyten, von b^3 im letzten Ziffer der folgenden Classe enthalten.

III. Ueber-

III. Ueberhaupt wenn man die schon gefundenen Theile der Cubikwurzel = a setzet, so ist allemal das niedrigste Ziffer von $3a^2b$ im ersten, von $3ab^2$ im zweyten, von b^3 im dritten Ziffer der darauf folgenden nächsten Classe enthalten.

Beweis von I.

Es enthalte die gegebene Zahl m + 1 Classen, so besteht die Wurzel aus eben so vielen Ziffern, das erste oder höchste davon z. B. f ist von der Ordnung m, oder $a = f. 10^m$; und das darauf folgende $b = g. 10^{m-1}$, mithin ist $a^3 = f^3. 10^{3m}$ $3a^2b = 3f^2. 10^{2m} g. 10^{m-1} = 3f^2. g. 10^{3m-1}$;

$3ab^2 = 3f. 10^m. g^2. 10^{2m-2} = 3fg^2. 10^{3m-2}$; endlich $b^3 = g^3. 10^{3m-3}$, wo wieder f und g die Ziffern ohne Localwerth ausdrücken;

Nun hat das letzte Ziffer der ersten Classe m Classen oder 3 m Ziffern nach sich, ist also wie a^3 von der Ordnung 10^{3m}; das nemliche läßt sich leicht von den Ziffern der folgenden Classe darthun; das erste ist nemlich von der Ordnung 3m—1, das zweyte von der Ordnung 3m—2; und das letzte von der Ordnung 3m—3.

Beweis von II.

Setzet man die gefundenen beyden ersten Theile für einen gleich a, so ist das niedrigste Ziffer der Ordnung m — 1, oder $a = h. 10^{m-1}$, mithin das darauf folgende oder $b = i. 10^{m-2}$, folglich wieder

$3a^2b$

$3a^2b = 3h^2 . 10^{2m-2}$. i. $10^{m-2} = 3h^2 i\ 10^{3m-4}$; ferner $3ab^2 = 3h . 10^{m-1} . i^2 . 10^{2m-4} = 3hi^2\ 10^{3m-5}$. Endlich $b^3 = i^3\ 10^{3m-6}$, woraus man leicht wie I. die Wahrheit des Satzes einsieht.

Beweis von III.

Nimmt man nun überhaupt die schon gefundenen Theile der Wurzel für a, so ist das niedrigste Ziffer desselben von der so vielten Ordnung, als die gegebene Zahl noch Classen enthält z. B. n; mithin $a = p . 10^n$; also $b = q10^{n-1}$

und $3a^2b = 3p^2\ 10^{2n} . q10^{n-1} = 3p^2q\ 10^{3n-1}$

$3ab^2 = 3p\ 10^n . q^2 10^{2n-2} = 3pq^2\ 10^{3n-2}$

$b^3 = q^3\ 10^{3n-3}$, woraus ebenfalls die Wahrheit des Satzes leicht eingesehen wird.

§. 131.

Aufgabe:

Aus einer Zahl von 4 bis 6 Ziffern die Cubikwurzel auszuziehen.

Auflösung:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Classen zu drey Ziffern, so enthält die Cubikwurzel so viele Ziffern, als man Classen hat, (§. 129. Zus.) in gegenwärtigen Fällen also zwey;

2. Nun nehme man aus der Tabelle §. 93. jenen Cubus, welcher der Zahl von der ersten Classe links gezählet

zählet, gleich, oder zunächst kleiner ist, und setze solche unter die erste Classe, als den Cubus des ersten Theiles, oder a^3, und die in der obersten Spalte der Tabelle treffende Zahl als die Wurzel, oder a nach einem Rechts gezogenen Striche (§. 130. I.), ziehe den gefundenen Cubus des ersten Theiles der Wurzel oder a^3 von den Ziffern der ersten Classe ab, und

3. setze zu dem Reste die Ziffern der zweyten Classe.

4. Man schreibe das dreyfache Quadrat des ersten Theiles oder $3a^2$ als Divisor so darunter, daß dessen niedrigstes Ziffer unter das erste oder höchste Ziffer der zweyten Classe zu stehen kömmt, und setze den Quotienten als den zweyten Theil der Wurzel oder b nach dem vorhergefundenen Ziffer oder a.

5. Nun bestimme man $3a^2b$, $3ab^2$, b^3, und setze das niedrigste Ziffer vom erstern unter das erste Ziffer der zweyten Classe, von $3ab^2$ unter das zweyte, von b^3 unter das dritte oder letzte Ziffer dieser zweyten Classe (§. 130. I.) und addire sie zusammen,

6. Ziehe endlich die Summe ab; im Falle nun kein Rest bleibt, so ist die gefundene Zahl die verlangte Cubicwurzel. (§. 127.)

I. Beyſpiel:

$$\begin{array}{r|l|l} & 9\,|\,2\,6\,1 & a+b \\ a^3 = & 8 & \\ \hline & 1\,2\,6\,1 & \\ 3a^2 = & (1\,2) & \\ 3a^2b = & 1\,2 & \\ 3ab^2 = & \quad 6 & \\ b^3 = & \quad\quad 1 & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \\ 2\,1 \end{array}$$

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1\,2\,6\,1$$

II. Beyſpiel:

$$\begin{array}{r|l|l} & 1\,4\,0\,|\,6\,0\,8 & a+b \\ a^3 = & 1\,2\,5 & \\ \hline & 1\,5\,6\,0\,8 & \\ 3a^2 = & (7\,5) & \\ 3a^2b = & 1\,5\,0 & \\ 3ab^2 = & \quad 6\,0 & \\ b^3 = & \quad\quad 8 & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \\ 5\,2 \end{array}$$

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1\,5\,6\,0\,8$$

Folglich iſt I. $\sqrt[3]{}\,9261 = 21$; und II. $\sqrt[3]{}\,140608 = 52$

§. 132.

Aufgabe:

Aus einer gegebenen Zahl, die mehr als 6 Ziffern enthält, die Cubikwurzel auszuziehen.

Auf-

Auflösung:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Classen zu drey Ziffern, so besteht die Wurzel aus eben so vielen Ziffern, als man Classen bekömmt (§. 129. Zus.)

2. Man bestimme aus den ersten oder höchsten zwey Classen nach §. 131. die ersten zwey Ziffern der Wurzel,

3. Setze zum Reste die dritte Classe, und nehme die die Ziffern der Wurzel als den ersten Theil (§. 130. II.), und bestimme wieder nach §. 131. No. 4—6 das folgende Ziffer der Wurzel.

4. Auf die nemliche Art werden alle übrigen Ziffern der Wurzel gefunden (§. 130. III.), bis alle Classen der gegebenen Zahl erschöpfet sind.

5. Ist an irgend einer Stelle der Rest sammt der folgenden Classe so beschaffen, daß wenn man $b = 1$ nimmt, solche doch kleiner als $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sind, so schreibe man für b eine Nulle, und setze sogleich eine neue Classe zur vorigen, und bestimme wieder nach No. 3. das folgende Ziffer der Wurzel;

6. Bleibt nun kein Rest, so ist die gefundene Zahl die verlangte Cubikwurzel.

I. Beyspiel.

$$
\begin{array}{rl}
 & 34 \mid 012 \mid 224 \;\{ 324 \\
a^3 = & 27 \\
\hline
 & 7012 \\
3a^2 = & (27) \\
3a^2b = & 54 \\
3ab^2 = & 36 \\
b^2 = & 8 \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 5768 \\
\hline
 & 1244224 \\
3a^2 = & (3072), \; (a = 32. \text{ Nr. } 3.) \\
3a^2b = & 12288 \\
3ab^2 = & 1536 \\
b^3 = & 64 \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 1244224 \\
\hline
 & -
\end{array}
$$

Mithin ist $\sqrt[3]{34012224} = 324$

II. Beyspiel.

II. Beyspiel.

$$
\begin{array}{rl}
 & 27 \mid 543 \mid 608 \mid 302 \\
a^3 = & 27 \\
\hline
 & 543608 \\
3a^2 = & (2700) \quad (a = 30 \text{ Nro. } 3 \text{ u. } 5.) \\
3a^2b = & 5400 \\
3ab^2 = & 360 \\
b^3 = & 8 \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 543608 \\
\hline
\end{array}
$$

Folglich ist $\sqrt[3]{27543608} = 302$.

I. Zusatz: Wenn man aus einer ganzen Zahl A die Cubikwurzel zieht, so giebt die gefundene Zahl n dreymal mit sich selbst multiplicirt, und im Falle ein Rest R bleibt, die Summe derselben die gegebene Zahl wieder, oder $n^3 + R = A$; denn beym Ausziehen der Cubikwurzel hat man alle Theile des Cubus der gefundenen Wurzel (§. 127.) abgezogen; mithin ist $A - n^3 = R$, und $A = n^3 + R$ (§. 29. I. Zus.)

II. Zusatz: Wenn die gefundene ganze Zahl n die Cubikwurzel aus A seyn soll, so muß der Rest oder $R < 3n^2 + 3n + 1$ seyn, denn

$A = n^3 + R$; wäre nun $R = 3n^2 + 3n + 1$; so müßte

$A = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n + 1)^3$ seyn, mithin auch

$\sqrt[3]{A}$

$\sqrt[3]{A} = n + 1$ (§. 94. a), welches um so mehr erfolget, wenn $R > 3n^2 + 3n + 1$ ist.

III. Zusatz: Wenn beym Ausziehen der Cubikwurzel von der ganzen Zahl A am Ende ein Rest bleibt, so ist die Cubikwurzel oder $\sqrt[3]{A}$ eine Irrationalzahl (§. 98. Zus.)

§. 133.

Aufgabe:

Aus einer ganzen Zahl, deren Cubikwurzel irrational ist, solche durch Annäherung zu bestimmen.

Auflösung:

Man hänge der gegebenen Zahl A so viel Classen von Nullen an, als man Decimalziffern der Wurzel bestimmen will, und verfahre wie bey ganzen Zahlen, am Ende setze man in der gefundenen Wurzel das Comma von der Rechten zur Linken nach so viel Ziffern, als man Classen von Nullen beygefüget hat.

Beweis:

Es sey die Anzahl der Classen $= n$, mithin der angehängten Nullen $= 3n$; so ist offenbar

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{\frac{A \cdot 10^{3n}}{10^{3n}}} = \frac{\sqrt[3]{A \cdot 10^{3n}}}{10^n}$$ (§. 97. I. Zus. §. 105. I. Zus.)

Folglich

Folglich kann man aus dem Zähler, d. i. aus der durch angehängte Nullen vermehrten Zahl die Wurzel wie gewöhnlich ausziehen, nur muß man am Ende als Nenner die Einheit mit so viel Nullen setzen, oder so viele Decimalstellen abschneiden (§. 87. II. Zus.) als man Classen von Nullen der Zahl A beyfügte.

Beyspiel:

3 } 1, 44224.....
1 }

2000
(3)
12
48
64

1744

256000
(588)
2352
672
64

241984

14016

12 14016000

1 4 0 1 6 0 0 0
(6 2 2 0 8)
1 2 4 4 1 6
1 7 2 8
8
1 2 4 5 8 8 8 8
1 5 5 7 1 1 2 0 0 0
(6 2 3 8 0 9 2)
1 2 4 7 6 1 8 4
1 7 3 0 4
8
1 2 4 7 7 9 1 4 4 8
3 0 9 3 2 0 5 5 2 0 0 0
(6 2 3 9 8 2 2 5 2)
2 4 9 5 9 2 9 0 0 8
6 9 2 2 5 6
64
2 4 9 5 9 9 8 2 3 4 2 4
5 9 7 2 0 7 2 8 5 7 6

Folglich $\sqrt[3]{3} = 1,44224\ldots$

I. Zusatz: Irrationalzahlen lassen sich durch Annäherung auf Rationalzahlen bringen. (§. 126.)

II. Zusatz: Soll man aus einem gegebenen Decimalbruch die Cubikwurzel ausziehen, so verfährt man wie bey ganzen Zahlen, nur muß die Eintheilung der Ziffern in Classen allemal vom Comma anfangen, und in jede Classe drey Decimalen zu stehen kom-

kommen, enthält der Decimalbruch weniger, so ergänzt man die fehlenden durch beygefügte Nullen, setzet z. B. 24,3 = 24,300 (§. 87. III. Zus.); am Ende schneidet man von der gefundenen Wurzel so viele Decimalen ab, als man Classen derselben im gegebenen Decimalbruch hat. Z. B. $\sqrt[3]{0,125} = 0,5$; $\sqrt[3]{0,000125} = 0,05$; $\sqrt[3]{1520,875} = 11,5$.

VI. Abschnitt.

Vom binomischen Lehrsatze.

§. 134.

Erklärung:

Jener Lehrsatz, der die Gesetze für jede Potenz einer zweytheiligen Größe angiebt, heißt der binomische Lehrsatz (Theorema binomiale), oder auch der Newtonianische Lehrsatz, weil man gewöhnlich Newton als den Erfinder desselben angiebt.

§ 135.

Allgemeine Gesetze für jede Potenz m einer zweytheiligen Größe a + b.

I Wenn der Exponent m eine ganze positive Zahl bezeichnet, so ist die Reihe der Glieder, woraus die Potenz besteht, endlich, und enthält m + 1 Glieder, d. i. um ein Glied mehr, als der Exponent Einheiten hat: ist hingegen der Exponent keine ganze positive Zahl, so ist die Reihe unendlich. (§. 119. c.)

II Jedes Glied der Reihe ist ein Produkt aus 3 Factoren, nemlich einer Potenz von a, einer Potenz von b, und einer Zahl, oder dem Coefficienten.

III Der

III Der Exponent von a im ersten Gliede ist der Exponent der verlangten Dignität selbst, oder = m; dieser Exponent nimmt in jedem folgenden Gliede um 1 ab, bis er im letzten Gliede, wenn die Reihe endlich ist, Null wird.

IV Der Exponent vom zweyten Theile b ist im ersten Gliede = 0, und wächst in jedem folgenden Gliede immer um 1, bis er im letzten Gliede bey einer endlichen Reihe dem Exponenten m der Dignität gleich wird.

V Der Coefficient des ersten Gliedes ist allemal = 1 in allen folgenden Gliedern aber ein Bruch, dessen Zähler ein Product aller Exponenten von a in den vorhergehenden Gliedern, und dessen Nenner ebenfalls ein Product so vieler in natürlicher Ordnung fortlaufender Zahlen ist, als Glieder vorangehen.

I Zusatz: Diese angeführten Gesetze stellet nachstehende Formel anschaulich vor, wo das mit ** bezeichnete Glied ein Ausdruck für das nte, und da n jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann, für jedes, oder das allgemeine Glied (§. 110. a.) ist, so wie das mit * bezeichnete sein unmittelbar vorhergehendes darstellet.

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2} a^{m-2} b^2 +$$

$$\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3} b^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots * + \frac{m.(m-1)\ldots\ldots(m-(n-3))}{1.\ 2\ldots\ldots(n-2)} a^{m-(n-1)} b^{n-1} +$$

$$** \frac{m.(m-1)\ldots\ldots(m-(n-3)).(m-(n-2))}{1.\ 2\ldots\ldots(n-2).(n-1)} a^{m-(n-1)} b^{n-1} + \ldots\ldots\ldots$$

II. Zu-

II. Zuſatz: Wenn der Exponent m eine Rationalzahl iſt, ſo kann er entweder eine ganze oder gebrochene Zahl, und in beyden Fällen entweder poſitiv, oder negativ ſeyn; mithin läßt ſich der binomiſche Lehrſatz für rationale Exponenten auf vier beſondere Lehrſätze zurückführen.

§. 136.

Lehrſatz:

Jede Potenz einer zweytheiligen Größe, deren Exponent eine poſitive ganze Zahl iſt, wird durch die Geſetze §. 135. beſtimmt, d. i.

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 +$$

$$\frac{m.(m-1)}{1}\frac{(m-2)}{2.}\frac{}{3}a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{m.(m-1)\ldots(m-(n-3))}{1.\ 2.\ \ldots\ (n-2)}a^{m-(n-2)}b^{n-2}$$

$$+ \frac{m.(m-1)\ldots(m-(n-3))}{1.\ 2.\ \ldots\ (n-2)}\cdot\frac{(m-(n-2))}{(n-1)}$$

$$a^{m-(n-1)}b^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + b^m$$

Beweis:

1. Man multiplicire die zweytheilige Größe $a+b$ mehrmal z. B. ſiebenmal mit ſich ſelbſt, ſo erhält man nachſtehende Tabelle für die erſten 7 Dignitäten:

$a+b$

$a+b$

$a^2+2ab+b^2$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

$a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

2. Bey allen diesen Potenzen läßt sich leicht einsehen, daß sie nach den Gesetzen §. 135. bestimmet sind, denn man setze z. B. von der 7ten Potenz die Factoren abgesondert untereinander:

a^7 , a^6 , a^5 , a^4 , a^3 , a^2 , a^1 , a^0

b^0 , b^1 , b^2 , b^3 , b^4 , b^5 , b^6 , b^7

1 , 7 , 21 , 35 , 35 , 21 , 7 , 1

So enthält die Reihe 8 Glieder §. 135 Nr. I; jedes Glied ist ein Product aus 3 Factoren Nr. II, die Exponenten sind nach Nr. III und IV bestimmet; endlich ist der Coefficient des ersten Gliedes $= 1$; und $7 = \frac{7}{1}$; $21 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}$; $35 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ u. s. f. folglich dem Gesetze Nr. V. gemäß.

3. Um nun den Satz für alle höhere Dignitäten zu beweisen, dient nachstehender Vernunftschluß:

Wenn die §. 135 angeführten Gesetze für irgend eine Dignität, deren Exponent m heißen mag, gelten, so gelten sie auch noch für das nächst höhere $m+1$:

Nun

Nun aber gelten sie für die ersten 7 Potenzen, als für $m = 7$; folglich auch für $m + 1$ oder die 8te Dignität. Setzet man wieder $m = 8$, so folgt ihre Gültigkeit für die 9te, und so immer für die nächst höhere; mithin allgemein.

4. Um nun den hypothetischen Obersatz zu beweisen, nehme man für irgend eine Potenz m die Formel Tab. I als geltend an;

5. Drücke, um sie abzukürzen, die Coefficienten indessen durch A. B. u. s. f. aus.

6. Multiplicire solche mit der Wurzel $a + b$, so erhält man die nächst höhere Dignität $m + 1$.

7. Betrachtet man diese durch die Multiplication erhaltene neue Reihe, so ist durch sie der hypothetische Obersatz Nr. 3 erwiesen; denn

8. Sie enthält um ein Glied mehr, als die vorige; bestand also letztere aus $m + 1$ Gliedern, so enthält die neue $m + 2$ Glieder §. 135 Nr. I.

9. Jedes Glied ist wieder ein Product aus 3 Factoren nach Nr. II.

10. Die Exponenten von a und b sind den Gesetzen Nr. III u. IV gemäß.

11. Der Coefficient des ersten Gliedes ist gleich 1, und die folgenden sind ebenfalls durch das Gesetz Nr. V. bestimmt, denn

$A + 1$

$$A + 1 = m + 1 = \frac{m+1}{1}$$

$$A + B = \frac{m}{1} + \frac{m.(m-1)}{1.2} = \frac{m}{1}.\left(1 + \frac{m-1}{2}\right) = \frac{m}{1}.\frac{2+m-1}{2}$$

$$= \frac{(m+1)m}{1.2}$$

$$B + C = \frac{m.(m-1)}{1.2}, \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3} = \frac{m.(m-1)}{1.2}.$$

$$: \left(1 + \frac{m-2}{3}\right) = \frac{m.(m-1)}{1.2}\,\frac{m+1}{3} = \frac{(m+1)\,m.(m-1)}{1.2.3}$$

Der Coefficient vom allgemeinen Gliede ist:

$$M + N = \frac{m.(m-1).....(m-(n-3))}{1.2.....(n-2)}$$

$$+ \frac{m.(m-1).....(m-(n-3)).(m-(n-2))}{1.2.....(n-2).(n-1)}$$

$$= \frac{m.(m-1)....(m-(n-3)).}{1.2....(n-2)}\left(1 + \frac{m-n+2}{n-1}\right) \text{ (§. 34)}$$

$$= \frac{m.(m-1)....(m-(n-3)}{1.2...(n-2)} \times \frac{m+1}{n-1}$$

$$= \frac{(m+1)\,m.(m-1).....(m-(n-3))}{1.2.3.....n-1}$$

I. Zusatz: Da $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$; so ist $(a + b)^m = a^m\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m$ (§. 96.). Drückt

man

man nun $\frac{b}{a}$ mit e aus, so ist nach dem binomischen Lehrsatz $(1+e)^m = 1 + \frac{m}{1} e + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2} e^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\ 2.\ 3} e^3 + \ldots\ldots$

Und Umgekehrt; ist die Giltigkeit dieser Formel allgemein erwiesen, so folgt jene für den binomischen Lehrsatz.

II. Zusatz: Für einen gebrochenen positiven Exponenten, wenn man für m im I Zus. $\frac{m}{n}$ substituirt, erhält man:

$$(1+e)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} e + \frac{m.(m-n)}{1.\ 2n^2} e^2 + \frac{m.(m-n).(m-2n)}{1.\ 2.\ 3n^3} e^3 + \ldots\ldots$$

III. Zusatz: Für einen negativen gebrochenen Exponenten erhält man durch ähnliche Substitution:

$$(1+e)^{-\frac{m}{n}} = 1 - \frac{m}{n} e + \frac{m.(m+n)}{1.\ 2n^2} e^2 - \frac{m.(m+n).(m+2n)}{1.\ 2.\ 3n^3} e^3 + \ldots\ldots$$

IV. Zusatz: Wenn der Exponent eine negative ganze Zahl ist, so verwandelt sich die Formel des I Zus. in nachstehende:

$(1+e)$

† Hieraus folgt.

$$(1-e)^{-\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} e + \frac{m(m+n)}{1.2.n^2} e^2 + \frac{m(m+n)(m+2n)}{1.2.3.n^3} e^3 + \ldots\ldots$$

$$(1+e)^{-m} = 1 - \frac{m}{1}e + \frac{m.(m+1)}{1.\ 2}e^2 - \frac{m.(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3}e^3 + \ldots\ldots$$

§. 137.

Lehrsatz: Die Gesetze des binomischen Lehrsatzes gelten auch für Potenzen, deren Exponent eine positive gebrochene Zahl ist, oder wenn m und n ganze positive Zahlen sind, so ist (§. 136. II Zus.)

$$(1+e)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}e + \frac{m.(m-n)}{1.\ 2\ n^2}e^2 + \frac{m.(m-n).(m-2n)}{1.\ 2.\ 3\ n^3}e^3 + \ldots\ldots$$

Beweis:

1. Man setze:

$$p = \frac{m}{n}e + \frac{m(m-n)}{1.\ 2\,n^2}e^2 + \frac{m.(m-n)(m-2n)}{1.\ 2.\ 3\,n^3}e^3 + \ldots\ldots$$

2. $(1+e)^m = 1 + \frac{m}{1}e + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2}e^2 + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}e^3 + \ldots\ldots$ (§. 136. I Zus.)

3. $(1+p)^n = 1 + \frac{n}{1}p + \frac{n.(n-1)}{1.\ 2}p^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}p^3 + \ldots\ldots$ (§. 136.)

4. Nun

4. Nun ist nach Nr. 1. $p = \frac{m}{n}e + \frac{m(m-n)}{1.2n^2}e^2 + \frac{m(m-n)}{1.2}\cdot\frac{(m-2n)}{3n^3}e^3 + \ldots\ldots$

also $p^2 = \frac{m^2}{n^2}e^2 + \frac{2m}{n}e \times \frac{m(m-n)}{1.2n^2}e^2 + \ldots\ldots$

$= \frac{m^2}{n^2}e^2 + \frac{m^2(m-n)}{n^3}e^3 + \ldots\ldots$

und $p^3 = \frac{m^3}{n^3}e^3 + \ldots\ldots$

Substituirt man diese Werthe in Nro. 3. so wird

5. $(1+p)^n = 1 + me + \left.\frac{m(m-n)}{1.2n} + \frac{m^2.(n-1)}{1.2n}\right\} e^2$

$+ \left.\frac{m.(m-n)}{1.2}\cdot\frac{(m-2n)}{3n^2} + \frac{m^2}{1.2}\cdot\frac{(m-n)}{n^2}\cdot\frac{(n-1)}{n^2} + \frac{m^3}{1.2}\cdot\frac{(n-1)}{n^2}\cdot\frac{(n-2)}{3n^2}\right\} e^3 + \ldots\ldots$

6. Nun ist

$\frac{m.(m-n)}{1.2n} + \frac{m^2.(n-1)}{1.2n} = m.\frac{(m-n+mn-n)}{1.2n}$

$= m.\frac{m-1}{2} = \frac{m.(m-1)}{1.2}$

Ferner

Ferner: $\frac{m.(m-n)(m-2n)}{1.\ 2.\ 3\,n^2} + \frac{m^2(m-n).(n-1)}{1.\ 2.\ n^2} +$

$\frac{m^3(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3\,n^2} = \frac{m.(m-n)(m-2n)+3m^2.}{1.\ 2.}$

$\frac{(m-n)(n-1)+m^3(n-1)(n-2)}{.3\quad n^2}$

$= m\left(\frac{2n^2-3mn^2+m^2n^2}{1.2.\ 3\,n^2}\right) = m\left(\frac{m^2-3m+2}{1.2.\ 3}\right)$

$= \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\quad 2.\quad 3}$ ....

7. Substituirt man diese Ausdrücke der Coefficienten in Nr. 5; so wird

$(1+p)^n = 1 + me + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2}e^2 + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$

$e^3 + \ldots\ldots = (1+e)^m$ Nro. 2, und $(1+e)^{\frac{m}{n}}$

$= (1+p)^{\frac{n}{n}}$ (§. 95. N. 1. §. 105. I Zus.) $= 1+p$,

mithin nach Nro. 1.

$(1+e)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}e + \frac{m.(m-n)}{1.\ 2n^2}e^2 + \frac{m.(m-n)(m-2n)}{1.\quad 2.\quad 3n^3}$

$e^3 + \ldots\ldots$

§. 138.

§. 138.

Lehrſatz:

Der binomiſche Lehrſatz erſtreckt ſich auch auf Potenzen, deren Exponent ein negativer Bruch iſt; d. i. (§. 136. III Zuſ.)

$$(1+e)^{-\frac{m}{n}} = 1 - \frac{m}{n}e + \frac{m.(m+n)}{1.\,2n^2}e^2 - \frac{m.(m+n)(m+2n)}{1.\,2.\,3\,n^3}e^3 + \ldots.$$

Beweis:

1. $(1+e)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(1+e)^{\frac{m}{n}}}$ (§. 104. III. Zuſ.

$(1+e)^{-\frac{m}{n}} \times (1+e)^{\frac{m}{n}} = 1$ (§. 43. b.)

2. Man beſtimme den erſten Factor aus §. 137, und für den zweyten Factor nehme man indeſſen die zuerweiſende Formel; iſt nun ihr Product $= 1$, ſo iſt die hier angenommene Formel die wahre; d. i.

$$(1+e)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}e + \frac{m.(m-n)}{1.\,2n^2}e^2 + \frac{m.(m-n)(m-2n)}{1.\,2.\,3\,n^3}e^3 + \ldots.$$

$$(1+e)^{-\frac{m}{n}} = 1 - \frac{m}{n}e + \frac{m.(m+n)}{1.\,2n^2}e^2 - \frac{m.(m+n)(m+2n)}{1.\,2.\,3\,n^3}e^3 + \ldots$$

$(1+e)$

$$(1+e)^{\frac{m}{n}} \times (1+e)^{-\frac{n}{n}} = 1 + \left\{ \begin{matrix} \frac{m}{n} \\ -\frac{m}{n} \end{matrix} \right\} e + \left\{ \begin{matrix} + \frac{m.(m-n)}{1.\ 2n^2} \\ - \frac{m^2}{n^2} \\ + \frac{m.(m+n)}{1.\ 2n^2} \end{matrix} \right\} e^2$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} + \frac{m.(m-n)(m-2n)}{1.\ 2.\ 3n^3} \\ - \frac{m^2.(m-n)}{1.\ 2\ n^3} \\ + \frac{m^2.(m+n)}{1.\ 2\ n^3} \\ - \frac{m.(m+n)(m+2n)}{1.\ 2.\ 3n^3} \end{matrix} \right\} e^3$$

3. Nun ist $\frac{m}{n} - \frac{m}{n} = 0$ der Coefficient des zweyten Gliedes.

Vom dritten Gliede ist wieder der Coefficient:

$$\frac{m(m-n)}{1.\ 2n^2} - \frac{m^2}{n^2} + \frac{m.(m+n)}{1.\ 2n^2} = \frac{m(m-1) + m(m+n)}{2n^2} - \frac{2m^2}{2n^2}$$

$$= \frac{m^2 - mn + m^2 + mn - 2m^2}{2n^2} = 0$$

Von

Vom vierten Gliede ist wieder der Coefficient = 0; denn

$$\frac{m.(m-n)(m-2n)}{1.\ 2.\ 3\ n^3} - \frac{m^2(m-n)}{1.\ 2\ n^3} + \frac{m^2(m+n)}{1.\ 2\ n^3} - \frac{m(m+n)(m+2n)}{1.\ 2.\ 3\ n^3}$$

$$= \frac{m.(m-n)(m-2n) - 3m^2(m-n) + 3m^2(m+n) - m(m+n)(m+2n)}{1.\ 2.\ 3\ n^3}$$

$$= \frac{m^3 - 3m^2n + 2mn^2 - 3m^3 + 3m^2n + 3m^3 + 3m^2n - m^3 - 3m^2n - 2mn^2}{1.\ 2.\ 3.\ n^3} = 0$$

4. eben so sind alle folgende Coefficienten = 0, mithin das Produkt beyder Reihen = 1, und

5. die für $(1+e)^{\frac{m}{n}}$ angenommene Reihe die wahre, folglich gilt der binomische Lehrsatz auch für Potenzen, deren Exponenten negative Brüche sind.

§. 139.

Lehrsatz:

Die Gesetze des binomischen Lehrsatzes erstrecken sich auch auf Potenzen, deren Exponenten negative ganze Zahlen sind, oder (§. 136. IV. Zus.)

$$(1+e)^{-m} = 1 - \frac{m}{1}e + \frac{m.(m+1)}{1.\ 2}e^2 - \frac{m.(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3}e^3 + \ldots.$$

Beweis:

1. Nach §. 138 ist

$$(1+e)^{-\frac{m}{n}} = 1 - \frac{m}{n}e + \frac{m(m+n)}{1 \cdot 2 n^2}e^2 - \frac{m.(m+n)(m+2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 n^3}e^3 + \ldots\ldots$$

2. Setzet man $n = 1$; so wird

$$(1+e)^{-m} = 1 - me + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}e^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}e^3 + \ldots\ldots$$

I. Zusatz: Durch die 4 Lehrsätze §. 136 — 139 ist der binomische Lehrsatze für alle Potenzen erwiesen, deren Exponenten Rationalzahlen sind. (§. 135. II. Zus.), und da sich Irrationalzahlen auf rationale reduciren lassen, (§. 133. I. Zus.) so ist der Lehrsatz allgemein erwiesen.

II. Zusatz: Substituirt man in der Formel (§. 136. I. Zus.) für e, Q, oder setzet $Q = \frac{b}{a}$; so ist:

$$(a+b)^m = a^m (1+Q)^m = a^m [1 + mQ + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}Q^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}Q^3 + \ldots\ldots$$

$$= a^m + m a^m Q + \frac{m.(m-1)}{1 \cdot 2} a^m Q^2 + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^m Q^3 + \ldots\ldots$$

Nun ist jedes Glied durch sein vorhergehendes theilbar, drückt man daher das erste Glied durch A, das

zwey-

zweyte durch B, und so die folgenden durch C, D, E, u. s. f. aus; so ist

$$(a+b)^m = a^m + m\,AQ + \frac{m-1}{2}\,BQ + \frac{m-2}{3}\,CQ + \frac{m-3}{4}\,DQ + \ldots.$$

III. Zusatz: Auf die nemliche Art wird für Potenzen mit gebrochenen Exponenten (§. 136 II. u. III. Zus.)

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\,AQ + \frac{m-n}{2n}\,BQ + \frac{m-2n}{3n}\,CQ + \ldots$$

§. 140.

Aufgabe:

Eine mehrtheilige Größe zu einer Dignität erheben, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist.

Auflösung:

1. Man nehme alle Theile der gegebenen Größe, ausser dem letzten, für den ersten Theil a,
2. den letzten Theil für den zweyten b.
3. den Exponenten der verlangten Dignität für m;
4. setze aus der Formel (§. 139 II. Zus.) oder auch nach der Formel (§. 136) um ein Glied mehr aus, als der Exponent der verlangten Dignität Einheiten enthält, d. i. m + 1 Glieder (§. 135. I.), und substituire die Nr. 1 — Nr. 3 gefundenen Werthe.

Beyspiel. $(\frac{1}{2}p + 3q)^5$; so ist $a = \frac{1}{2}p$; $b = 3q$,

 $Q =$

$Q = \frac{b}{a} = \frac{3q}{\frac{1}{2}p} = 6\frac{q}{p}$; $m = 5$, mithin (§. 139. II. Zuſ.) $a^m = (\frac{1}{2}p)^5 = \frac{1}{32}p^5 = A$

$mAQ = 5 \times \frac{1}{32}p^5 \times 6\frac{q}{p} = \frac{15}{16}p^4 q = B$

$\frac{m-1}{2}BQ = 2 \times \frac{15}{16}p^4 q \times 6\frac{q}{p} = \frac{45}{4}p^3 q^2 = C$

$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{45}{4}p^3 q^2 \times 6\frac{q}{p} = \frac{135}{2}p^2 q^3 = D$

$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{2} \times \frac{135}{2}p^2 q^3 \times 6\frac{q}{p} = \frac{405}{2}p q^4 = E$

$\frac{m-4}{5}EQ = \frac{1}{3} \times \frac{405}{2}p q^4 \times 6\frac{q}{p} = 243 q^5$

Folglich:

$(\frac{1}{2}p + 3q)^5 = \frac{1}{32}p^5 + \frac{15}{16}p^4 q + \frac{45}{4}p^3 q^2 + \frac{135}{2}p^2 q^3 + \frac{405}{2}p q^4 + 243 q^5$

Zuſatz:

$(p + q + r)^5 = (p+q)^5 + 5(p+q)^4 r + 10(p+q)^3 r^2 + 10(p+q)^2 r^3 + 5(p+q) r^4 + r^5$

§. 141.

Aufgabe:

Eine mehrtheilige Größe zu einer Dignität zu erheben, deren Exponent eine negative ganze Zahl, oder ein poſitiver oder negativer Bruch iſt.

Auflöſung:

1. Man theile wieder die gegebene Größe in zwey Theile, nehme einen für a, den andern für b, und den Exponenten für m, oder $\frac{m}{n}$, je nachdem der Ex-

Exponent der verlangten Dignität eine ganze oder gebrochene Zahl ist.

2. Da nun allemal die Reihe unendlich ist (§. 135. I.) so bestimme man aus (§. 139 II. u. III. Zus.) so viele Glieder, daß die folgenden als verschwindend weggelassen werden können, wenn die Reihe abnimmt; wächst sie aber, so ist die Auflösung unmöglich, weil man die Potenz nie vollständig darstellen kann.

Beyspiel: $\sqrt[3]{68} = (64+4)^{\frac{1}{3}}$ (§. 105 I. Zus.) Man nehme $a=64$; $b=4$; $Q=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$; $m=1$; $n=3$ (§. 139 III. Zus.), mithin:

$a^{\frac{m}{n}} = 64^{\frac{1}{3}} = 4{,}0000000 = A$

$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{3}\times 4\times\frac{1}{16} = \frac{1}{12} = 0{,}0833333$ (§. 91) $= B$

$\frac{m-n}{2n}BQ = \frac{1-3}{6}\times 0{,}0833333\times\frac{1}{16} =$

$-0{,}0017361 = C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = \frac{1-6}{9}\times -0{,}0017361\times\frac{1}{16} =$

$0{,}0000603 = D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = \frac{1-9}{12}\times 0{,}0000603\times\frac{1}{16} =$

$-0{,}0000025 = E$

$\frac{m-4n}{5n}EQ = \frac{1-12}{15}\times -0{,}0000025\times\frac{1}{16} =$

$0{,}0000001 = F$

Nun

Nun iſt;

A	= 4,0000000	C	= — 0,0017361
B	= 0,0833333	E	= — 0,0000028
D	= 0,0000003	Summe	= — 0,0017386
F	= 0,0000001		
Summe	= 4,0833937		
Summe	— 0,0017386		
Diff.	= 4,0816551		

Folglich: $\sqrt[3]{68} = 4{,}0816551 \ldots\ldots$

VII. Abſchnitt.

Von den Permutationen und Combinationen.

§. 142.

Lehrſatz:

Die Anzahl der Permutationen, das iſt, wie oft man bey n Dingen ihre Stellen verwechſeln kann, erhält man, wenn man ſo viele in natürlicher Ordnung fortlaufende Zahlen, von 1 angefangen, mit einander multiplicirt, als Dinge gegeben ſind, oder $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots (n - 1) \cdot n$

Beweis:

1. In der II. Tabelle enthält die erſte lothrechte Spalte die gegebenen Dinge, und die zweyte die möglichen Verſetzungen derſelben, man ſieht nemlich

a. daß

2. daß ein Ding a nur eine Stelle haben kann; kömmt aber das zweyte Ding b dazu, so kann solches zwey Stellen, die erste und zweyte haben, nemlich b a, a b, mithin ist die Anzahl der Versetzungen für 2 Dinge = 1. 2.

3. Das dritte Ding c kann bey jeder der vorigen Versetzungen drey Stellen, nemlich am Anfange, in der Mitte, und am Ende haben, folglich muß die Anzahl der vorigen Versetzungen von zwey Dingen mit 3 multiplicirt werden, oder die Anzahl der Versetzungen von drey Dingen ist = 1. 2. 3.

4. Das vierte Ding d giebt wieder mit jeder der vorigen Versetzungen von 3 Dingen vier neue, das ist: es kann bey jeder der vorigen Versetzungen vier Stellen, nemlich vor dem ersten, vor dem zweyten, vor und nach dem dritten Dinge seine Stelle haben, mithin geben 4 Dinge 1. 2. 3. 4. Versetzungen.

5. Gilt nun das angeführte Gesetz für irgend eine Anzahl der Dinge z. B. m; so gilt es noch bey der nächst höhern Anzahl m + 1 derselben; denn wenn m Dinge 1. 2. 3. 4. . . . . m Versetzungen geben, so läßt sich das neue hinzukommende (m+1)te Ding mit jeder der vorigen Versetzungen (m+1)mal versetzen, da es offenbar bey m Dingen m + 1 Stellen giebt, wo es stehen kann, mithin ist die Anzahl der Versetzungen + 1. 2. 3. . . . . (m — 1) m. (m + 1)

6. Aus Induction Nr. 1 — 4 ist das Gesetz für 4 Dinge erwiesen, also folget aus Nr. 5 die Giltigkeit für fünf Dinge

Dinge, und aus dieſen für 6 u. ſ. f. folglich iſt allgemein die Anzahl der Verſetzungen bey n Dingen $= 1.2.3.4.\ldots(n-1).n$

I. Zuſatz: Die 5 Vocalen laſſen ſich 120mal, und die 8 Töne in der Muſik 40320mal, zwölf Perſonen am einem Tiſche 479001600mal verſetzen.

II. Zuſatz: Wenn bey einer gewiſſen Ordnung z. B. von 6 Dingen a β c d ε f vier Dinge a c d f ihre Stellen behalten, und nur die zwey Dinge β, ε wechſeln, ſo geben letztere zwey Verſetzungen β ε und ε β und jede derſelben läßt ſich mit den obigen vier Dingen gleichvielmal verſetzen; ſind alſo die zwey Dinge β und ε ganz einerley, ſo fällt davon die Hälfte weg, oder die ganze Anzahl der Verſetzungen wird um die Hälfte vermindert, mithin geben in dieſem Falle n Dinge $\frac{1.2.3.\ldots.n}{1.2.}$ Verſetzungen; ſo läßt ſich z. B. das Wort München $\frac{1.2.3.4.5.6.7.}{1.2.}$ mal verſetzen, weil n zweymal vorkömmt.

III. Zuſatz: Behalten bey einer gewiſſen Ordnung z. B. von 7 Dingen a β c δ ε f g wieder 4 Dinge a c f g ihre Stellen, 3 Dinge aber β δ ε wechſeln, ſo geben ſolche $1.2.3. = 6$ Verſetzungen für ſich genommen, und jede derſelben läßt ſich mit jeder Ordnung obiger 4 Dinge gleichvielmal verſetzen: ſind alſo letztere drey Dinge einerley, ſo fallen ſie in eine zuſammen, mithin

geben

geben n Dinge, wenn eines davon dreymal vorkömmt, $\frac{1.2.3.4.\ldots.(n-1)n}{1.2.3.}$ Verſetzungen.

IV. Zuſatz: Kömmt bey n Dingen, ein Ding m mal und ein anderes p mal vor, ſo iſt die Anzahl ſämmtlicher Verſetzungen $\frac{1.2.3.4.\ldots\ldots n}{1.2.3.\ldots m.\ 1.2.3.\ldots p}$ z. B. In dem Worte Studioſus laſſen ſich die 9 Buchſtaben, weil s dreymal, und u zweymal vorkömmt, $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.}{1.2.3.\ 1.\ 2.} = 30240$ mal verſetzen.

§. 143.

Erklärungen:

Wenn man aus einer gegebenen Menge von Dingen, ſo viele Paare, ſo viele nach Dreyen, Vieren, u. ſ. w. oder überhaupt nach m nimmt, als es angeht, ſo nennet man ſie Amben, Ternen, Quaternen u. ſ. w. oder überhaupt Combinationen, oder Verſetzungen nach Zweyen, Dreyen u. ſ. f. nach m.

§. 144.

Lehrſatz:

Die Anzahl der Amben für n Dinge iſt $= \frac{n.(n-1)}{2.}$

Beweis:

1. Aus der IIIten Tabelle leuchtet die Wahrheit des Satzes durch Induction für 5 Dinge ein, denn

1 Ding

1 Ding giebt 0 Paare $= \frac{1.(1-1)}{1.2}$

2 Dinge geben 1 Paar $= \frac{2.1}{1.2}$

3 Dinge geben 3 Paare $= \frac{3.2}{1.2}$

4 Dinge hingegen 6 Paare $= \frac{4.3}{1.2}$

5 Dinge endlich 10 Paare $= \frac{5.4}{1.2}$

2. Ueberhaupt giebt allemal ein neues Ding, welches hinzu kömmt, so viel neue Paare, als vorher Dinge waren, das m + 1te Ding giebt nemlich zu den vorigen m neue Paare.

3. Gilt daher die Formel für irgend eine Anzahl m von Dingen, so gilt sie auch noch für die nächsthöhere Anzahl; das ist: geben m Dinge $\frac{m.(m-1)}{1.2}$ Paare, so geben m + 1 Ding $\frac{(m+1).m}{1.2}$ Paare, denn

4. Wenn m Dinge $\frac{m.(m-1)}{1.2}$ Paare geben, so giebt zu diesen das neuhinzukommende Ding m neue Paare, oder die Anzahl der Amben für m + 1 Dinge ist $=$

$$= \frac{m.(m-1)}{1.2} + m = \frac{m}{1} \times \left(1 + \frac{m-1}{2}\right) = \frac{(m+1)m}{1.2}$$

5. Da nun für m = 5 die Annahme richtig ist, so gilt die Formel auch für 6 Dinge, und aus 6 für 7, und so für jede höhere Anzahl von Dingen, mithin geben allgemein n Dinge $\frac{n.(n-1)}{1.2}$ Amben.

§. 145.

§. 145.

Lehrſatz:

Die Anzahl der Ternen von n Dingen iſt $= \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$

Beweis:

1. Aus der IIIten Tabelle leuchtet die Wahrheit des Satzes für 5 Dinge ein, denn offenbar giebt

   1 Ding 0 Ternen $= \frac{1.(1-1)(1-2)}{1.\ 2.\ 3}$

   2 Dinge geben 0 Ternen $= \frac{2.1.(2-2)}{1.\ 2.\ 3}$

   3 Ding geben 1 Terno $= \frac{3.2.1}{1.2.3}$

   4 Dinge geben 4 Ternen $= \frac{4.3.2}{1.2.3}$

   Von 5 Dingen erhält man 10 Ternen $= \frac{5.4.3}{1.2.3}$

2. Das folgende 6te Ding giebt zu den 10 Ternen, die man von 5 Dingen erhält, ſo viele neue Ternen, als 5 Dinge Amben geben, d. i. $\frac{5.4}{1.2}$ neue Ternen (§. 144); mithin geben 6 Dinge $\frac{5.4.3}{1.2.3} + \frac{5.4}{1.2} = \frac{6.5.4}{1.2.3} =$ 20 Ternen.

3. Ueberhaupt giebt allemal das neue Ding, welches man beyſetzet, zu den vorigen Ternen ſo viele neue, als die vorigen Dinge Amben gaben, denn offenbar

dar giebt es mit jedem Ambo einen Terno, mithin giebt das m + 1te Ding $\frac{m.(m-1)}{1.\ 2}$ neue Ternen (144).

4. Gilt also der aufgestellte Satz für irgend eine Anzahl m von Dingen, so gilt er auch noch für die nächst höhere Anzahl m + 1, d. i. wenn m Dinge $\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$ Ternen geben, so geben m + 1 Dinge $\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{1.\ 2.\ 3}$ Ternen.

Denn

Wenn m Dinge $\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$ Ternen geben, so bekömmt man nebst diesen, wenn noch ein Ding hinzukömmt, $\frac{m.(m-1)}{1.\ 2}$ neue Ternen Nr. 3 oder m + 1 Ding geben $\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2}$ $= \frac{(m+1)\,m.(m-1)}{1.\ 2.\ 3}$ Ternen.

5. Da nun die Annahme für m = 6 Nr. 2 richtig ist, so gilt der Satz auch für 7 Dinge, aus 7 für 8, und so für jede größere Anzahl von Dingen, mithin ist allgemein die Anzahl der Ternen für n Dinge = $= \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$

1. Zusatz: Auf die nemliche Art läßt sich erweisen, daß die Anzahl der Quaternen $= \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

und

und wenn man die Induction immer fortsetzet, so findet man, daß die Anzahl der Versetzungen von n Dingen nach m $= \frac{n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-(m-1))}{1.2.3.\ldots.m}$

Anmerkung:

Der strenge Beweis der letzten allgemeinen Formel setzet Lehren voraus, die für gegenwärtiges Lehrbuch zu weitläufig sind.

II. Zusatz: In der gewöhnlichen Zahlen-Lotterie giebt es von 90 Zahlen 4005 Amben, 117480 Ternen, 2555190 Quaternen; da nun bey einer jeden Ziehung 5 Zahlen gehoben werden; so kommen dabey 10 Amben, 10 Ternen, und 5 Quaternen zum Vorschein.

§. 148.

Lehrsatz:

Wenn das nemliche Ding mehrmal vorkömmt, und überdieß Versetzungen der Dinge Statt haben, so ist die Anzahl der Versetzungen nach Zweyen bey n Dingen $= n^2$.

Beweis:

1. Durch Induction erhellet die Wahrheit dieses Satzes aus der zweyten Spalte der IVten Tabelle, so lange die Anzahl der Dinge nicht gröſser als 4 ist;

Denn 1 Ding giebt 1 Ambo $= 1^2$
2 Dinge geben 4 Amben $= 2^2$
3 Dinge....9..... $= 3^2$
4 Dinge....16.... $= 4^2$

2. Eben

2. Eben so läßt sich aus dieser Tabelle bemerken, daß allemal das neue Ding, welches hinzukömmt nebst den schon vorhandenen Verbindungen folgende neue giebt:

I. Mit jedem der vorigen Dinge zwey,

II. Mit sich selbst eine, weil es zweymal gesetzet werden darf.

3. Gilt daher der aufgestellte Satz für irgend eine Anzahl n von Dingen, so gilt er auch für die nächst höhere Anzahl derselben, oder für $n + 1$ Dinge; denn

4. Geben n Dinge n^2 Versetzungen nach Zweyen, so giebt das neuhinzukommende $n + 1$te Ding $2n + 1$ neue Versetzungen nach zweyen (Nr. 2), mithin ist die ganze Anzahl derselben für $n + 1$ Dinge $= n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, also dem angeführten Gesetze gemäß.

5. Da nun für $n = 4$ das aufgestellte Gesetz gilt (Nr. 1), so gilt es auch noch für $n + 1 = 5$ Dinge, aus 5 für 6, und so immer für jede nächst höhere Anzahl von Dingen; folglich allgemein.

§. 147.

Lehrsatz:

Wenn wieder Versetzungen der Dinge Statt haben, und das nemliche Ding mehrmahl genommen werden darf, so ist für n Dinge die Anzahl der Verbindungen nach Dreyen $= n^3$

Be-

Beweis:

1. So lange die Anzahl n der gegebenen Dinge nicht gröſſer als 4 ist, so folgt die Wahrheit des aufgestellten Satzes durch Induction aus der IVten Tabelle; denn

   1 Ding giebt 1 Versetzung nach Dreyen $= 1^3$
   2 Dinge geben 8 Versetzungen . . . . . $= 2^3$
   3 Dinge . . . 27 . . . . . $= 3^3$
   4 Dinge . . . 64 . . . . . $= 4^3$

2. Aus eben dieser Tabelle läſst sich bemerken, daſs ein neues Ding, welches den vorigen beygesetzet wird, zu den schon vorhandenen Verbindungen folgende neue giebt:

   I. Mit jedem Paare der vorhergehenden Dinge läſst es sich dreymal versetzen, und giebt daher dreymal so viele neue Verbindungen, als solche Paare vorhanden sind;

   II. Das neue Ding selbst, zweymal genommen, läſst sich mit jedem der vorigen Dinge dreymal versetzen, und giebt also dreymal so viele neue Verbindungen, als vorher Dinge waren:

   III. Das neue Ding endlich selbst, dreymal genommen, giebt wieder eine neue Verbindung nach Dreyen.

3. Gilt nun das aufgestellte Gesetz für irgend eine Anzahl n von Dingen, so gilt es auch für die nächst höhere Anzahl $n + 1$ derselben, das ist: wenn n Dinge n^3 Verbindungen nach Dreyen geben, so bekömmt man von $n + 1$ Dingen $(n + 1)^3$ solche Verbindungen, denn

4. Wenn

4. Wenn das n + 1te Ding dazukömmt, so giebt es auſſer den schon vorhandenen n^3 Verſetzungen nach Nr. 2 folgende neue:

I 3 n^2 (§. 146); II 3 n; III, 1;

Folglich iſt die ganze Anzahl derſelben

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3.$$

5. Da nun der aufgeſtellte Satz für $n = 4$ gilt (Nr. 1), ſo gilt er auch für $n + 1 = 5$, aus 5 für 6, und ſo immer für jede nächſtfolgende Anzahl von Dingen, mithin allgemein.

I. Zuſatz: Durch ähnliche Schlüſſe läßt ſich darthun, daß die Anzahl der Verbindungen bey den nemlichen Bedingungen nach Vieren $= n^4$, und da man dieſe Schlüſſe immer fortſetzen kann, ſo iſt die Anzahl der Verbindungen nach $m = n^m$

II. Zuſatz: Mit zwey Würfeln, an welchen ſich auf jeder Seite ſogenannte Augen befinden, ſind 36 Würfe möglich.

III. Zuſatz: Die 9 Zahlziffern laſſen ſich nach Zweyen 81mal verſetzen, rechnet man alſo jene 9 Paare dazu, wo jedem Zahlenziffer 0 angehängt iſt, ſo kann man mit 2 Ziffern 90, und alſo mit einem und zwey Ziffern in allem 99 verſchiedene Zahlen bezeichnen, um alſo die Zahl hundert zu ſchreiben, muß man wenigſtens drey Ziffern nehmen.

IV. Zu-

IV. Zuſatz: Nach Dreyen erhält man aus den 9 Zahlenziffern 729 Verbindungen, ferner kann bey jedem Paare von Zahlenziffern die Null in der Mitte, und am Ende ſtehen, dieſes giebt 2. 81=162 Verbindungen; endlich kann nach jedem Zahlenziffer ein Paar Nullen folgen, woraus wieder 9 Verbindungen entſtehen, mithin geben die 10 Ziffern 900 Verbindungen nach dreyen, ſo daß ſich mit 1, 2 und 3 Ziffern 999 verſchiedene Zahlen ausdrücken laſſen, folglich um Tauſend zu ſchreiben brauchet man wenigſtens 4 Ziffern. Man ſieht daraus, daß im Decimalſyſteme (§. 24.) das Geſetz der Sparſamkeit auf das ſtrengſte beobachtet ſeye.

V. Zuſatz: Abſtrahirt man von allem Inhalte der drey Sätze, aus denen der kategoriſche Syllogiſmus beſteht, und ſieht nur auf ihre Form, ſo kann jeder der Form nach entweder allgemein bejahend, oder allgemein verneinend; particular bejahend, oder particular verneinend ſeyn, zu deren Bezeichnung a, e, i, o dienen. Betrachtet man nur die beyden Prämiſſen, und abſtrahirt überdieß von den Geſetzen der Logik, ſo giebt es 16 verſchiedene Schlußarten, die in der 2ten Spalte der IVten Tabelle dargeſtellet ſind. Nimmt man endlich auch den dritten oder Schlußſatz in Anſchlag ohne die weitern Geſetze der Logik in Betracht zu ziehen, ſo erhält man 64 Schlußarten, die alle in der dritten Spalte der IVten Tabelle angezeiget ſind. Durch die Geſetze der Logik, daß beyde Prämiſſen zugleich weder verneinend, noch

4. Wenn das n + 1te Ding dazukommt, so giebt es auſſer den schon vorhandenen n^3 Verſetzungen nach Nr. 2 folgende neue:

I 3 n^2 (§. 146); II 3 n; III, 1;

Folglich iſt die ganze Anzahl derſelben

$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$.

5. Da nun der aufgeſtellte Satz für $n = 4$ gilt (Nr. 1), ſo gilt er auch für $n + 1 = 5$, aus 5 für 6, und ſo immer für jede nächſtfolgende Anzahl von Dingen, mithin allgemein.

I. Zuſatz: Durch ähnliche Schlüſſe läßt ſich darthun, daß die Anzahl der Verbindungen bey den nemlichen Bedingungen nach Vieren $= n^4$, und da man dieſe Schlüſſe immer fortſetzen kann, ſo iſt die Anzahl der Verbindungen nach $m = n^m$

II. Zuſatz: Mit zwey Würfeln, an welchen ſich auf jeder Seite ſogenannte Augen befinden, ſind 36 Würfe möglich.

III. Zuſatz: Die 9 Zahlziffern laſſen ſich nach Zweyen 81mal verſetzen, rechnet man alſo jene 9 Paare dazu, wo jedem Zahlenziffer 0 angehängt iſt, ſo kann man mit 2 Ziffern 90, und alſo mit einem und zwey Ziffern in allem 99 verſchiedene Zahlen bezeichnen, um alſo die Zahl hundert zu ſchreiben, muß man wenigſtens drey Ziffern nehmen.

IV. Zuſatz: Nach Dreyen erhält man aus den 9 Zahlenziffern 729 Verbindungen, ferner kann bey jedem Paare von Zahlenziffern die Null in der Mitte, und am Ende ſtehen, dieſes giebt 2. 81=162 Verbindungen; endlich kann nach jedem Zahlenziffer ein Paar Nullen folgen, woraus wieder 9 Verbindungen entſtehen, mithin geben die 10 Ziffern 900 Verbindungen nach dreyen, ſo daß ſich mit 1, 2 und 3 Ziffern 999 verſchiedene Zahlen ausdrücken laſſen, folglich um Tauſend zu ſchreiben brauchet man wenigſtens 4 Ziffern. Man ſieht daraus, daß im Decimalſyſteme (§. 24.) das Geſetz der Sparſamkeit auf das ſtrengſte beobachtet ſeye.

V. Zuſatz: Abſtrahirt man von allem Inhalte der drey Sätze, aus denen der kategoriſche Syllogiſmus beſteht, und ſieht nur auf ihre Form, ſo kann jeder der Form nach entweder allgemein bejahend, oder allgemein verneinend; particular bejahend, oder particular verneinend ſeyn, zu deren Bezeichnung a, e, i, o dienen. Betrachtet man nur die beyden Prämiſſen, und abſtrahirt überdieß von den Geſetzen der Logik, ſo giebt es 16 verſchiedene Schlußarten, die in der 2ten Spalte der IVten Tabelle dargeſtellet ſind. Nimmt man endlich auch den dritten oder Schlußſatz in Anſchlag ohne die weitern Geſetze der Logik in Betracht zu ziehen, ſo erhält man 64 Schlußarten, die alle in der dritten Spalte der IVten Tabelle angezeiget ſind. Durch die Geſetze der Logik, daß beyde Prämiſſen zugleich weder verneinend, noch

particulär seyn dürfen, und daß sich die Conclusion nach dem schwächern Theil richten müsse, fallen alle Slußarten bis auf 11 weg, die mit Cursivlettern in der Tabelle bezeichnet sind, und von diesen wird die Schlußart i e o durch die einzelnen Gesetze einer jeden Figur unzulässig.

IV. Hauptstück.

Von Gleichungen.

I. Abschnitt.

Von Gleichungen überhaupt.

§. 148.

Erklärung:

a Ein doppelter Ausdruck von einerley Größe, heißt eine Gleichung (Aequatio) z. B. $3 + 4 = 7$.

b Die beyden Ausdrücke der nemlichen Größe heißen die Seiten (membra), und die durch die Zeichen + oder — verbundenen Größen, die Glieder der Gleichung (termini); so machen in der vorhergehenden Gleichung $3 + 4$ die eine, und 7 die andere Seite aus, von welcher erstere zwey, die andere nur ein Glied enthält.

c Jener

c Jener Theil der Mathematik, welcher den Werth der unbekannten Größen aus gegebenen Bedingungen vermittels der Gleichungen abzuleiten lehret, heißt **Algebra.**

Zusatz:

Die Behandlungsart jeder Gleichung besteht

a in der **Formation** oder Bildung der Gleichung aus den gegebenen Bedingungen der unbekannten Größen; sie ist eigentlich die Uebersetzung der Aufgabe aus der bürgerlichen in die algebraische Sprache. Man bezeichnet bekannte Größen mit den erstern Buchstaben des Alphabetes z. B. a, b, c, u. s. w., die unbekannten Größen mit den letztern Buchstaben x, y, z,

b in der **Reduction**, wodurch man der Gleichung eine einfachere, und schicklichere Gestalt giebt, vorzüglich, wenn die unbekannte Größe als Divisor, oder Wurzelgröße vorkömmt.

c In der **Solution**, oder endlichen Reduction, wo die Gleichung so weiter behandelt wird, daß der **Werth** der unbekannten Größe, d. i. jene Größe gefunden wird, die den gegebenen Bedingungen entspricht; die gefundene Größe, oder Größen, wenn es für eine Gleichung deren mehrere giebt, nennet man die **Werthe**, oder die **Wurzeln** der gegebenen Gleichung.

Anmerkung:

Da die Formation einer Gleichung auf Sachenkenntniß, Uebung, und gesunder Urtheilskraft, also Dingen beruhet, die die Mathematik voraussetzen muß, aber nicht lehren kann, so sind ihre Vorschriften auf Reduction und Solution schon gegebener Gleichungen eingeschränket.

§. 149.

Anwendung des 9ten Grundsatzes §. 19 auf die Reductionslehre der Gleichungen;

1. Eine Gleichung bleibt noch, wenn man zu beyden Seiten derselben Gleiches addirt, oder davon subtrahirt.

2. In jeder Gleichung darf man auf beyden Seiten mit einerley Größe multipliciren, oder dividiren.

3. In jeder Gleichung kann man der Gleichung unbeschadet beyde Seiten zu gleichen beliebigen Dignitäten erheben, gleiche beliebige Wurzeln aus ihnen ziehen.

I. Zusatz: Jedes Glied einer Gleichung läßt sich, wenn man sein Zeichen ändert, versetzen, d. i. von einer Seite auf die andere bringen, man kann nemlich eine Größe mit dem Zeichen + auf die andere Seite schreiben, wenn man ihr das Zeichen — vorsetzet; und umgekehrt. Z. B.

Wenn

Wenn $a + b = c$ so ist $a = c - b$ | eben so wenn $a - d = f$, so ist $a = f + d$

Denn $a + b - b = c - b$; und $a - d + d = f + d$ (Nr. 1.)

also $a = c - b$; $a = f + d$.

II. Zusatz: Die Zeichen aller Glieder lassen sich in die entgegengesetzten verwandeln. Z. B.

Wenn $a + b = c - d$; so ist $-a - b = -c + d$.

Denn man darf nach vorigem Zusatze alle Glieder versetzen, wodurch jedes das entgegengesetzte Zeichen erhält.

III. Zusatz: Jede Gleichung läßt sich auf o bringen, wenn man alle Größen auf die andere Seite schaffet.

IV. Zusatz: Eine Größe, die mit einer andern durch Multiplication verbunden ist, läßt sich davon trennen, wenn man damit alle Glieder der Gleichung dividirt. Z. B. wenn $3a + 6b = 15$: so ist $a + 2b = 5$ (Nr. 2).

V. Zusatz: Größen, die als Nenner, oder Divisoren vorkommen, lassen sich wegschaffen, wenn man mit ihnen alle Glieder der Gleichung multiplicirt, z. B.

wenn $\frac{a}{3} + b = 4c$, so ist

$a + 3b = 12c$ (Nr. 2).

§. 150.

Eintheilungen:

In einer Gleichung ist die unbekannte Grösse die Hauptgrösse, und von ihr erhält die Gleichung ihre Benennung; man unterscheidet daher

A in Rücksicht der Anzahl der vorkommenden unbekannten Grösen

a Gleichungen mit einer,

b mit mehrern unbekannten Grösen.

B in Rücksicht der Beschaffenheit der unbekannten Grösen

a einfache Gleichungen, oder vom ersten Grade, erster Ordnung, wenn die unbekannte Grösse, nachdem sie kein Divisor mehr ist, auch bey keiner andern unbekannten Grösse als Factor vorkömmt, eine einfache Grösse ist, also die erste Potenz nicht übersteigt,

b zusammengesezte, oder höhere Gleichungen wenn die unbekannte Grösse die erste Dignität übersteigt; und zwar heißt so eine Gleichung quadratisch, cubisch, biquadratisch u. s. w. je nachdem die höchste Dignität der unbekannten Grösse ein Quadrat, Cubus, Biquadrat u. s. f. ist.

Zuſatz:

Durch eine Gleichung läßt ſich eine und nur eine unbekannte Größe beſtimmen; man nennet daher Gleichungen mit einer unbekannten Größe beſtimmte, mit mehrern unbekannten Größen unbeſtimmte Gleichungen.

II. Abſchnitt.

Von einfachen Gleichungen.

§. 151.

Aufgabe:

Eine gegebene einfache Gleichung mit einer unbekannten Größe aufzulöſen.

Auflöſung:

1. Kömmt die unbekannte Größe als Nenner vor, ſo ſchaffe man ſie nach §. 149. V. Zuſ. weg.
2. Eben ſo bringe man alle jene Größen weg, die bey der unbekannten Größe als Nenner ſtehen.
3. Setze man alle Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten, auf eine, und jene Glieder, die aus gegebenen Größen beſtehen, auf die andere Seite (§. 149. I. Zuſ.).
4. Sammle die Coefficienten der unbekannten Größe in eine Summe, iſt dieſe nun negativ, ſo ändere man alle Zeichen (149. II. Zuſ.), und dividire damit endlich beyde Seiten (§. 149. IV. Zuſ.)

Z. B.

§. 150.

Eintheilungen:

In einer Gleichung ist die unbekannte Größe die Hauptgröße, und von ihr erhält die Gleichung ihre Benennug; man unterscheidet daher

A in Rücksicht der Anzahl der vorkommenden unbekannten Größen

a Gleichungen mit einer,

b mit mehrern unbekannten Größen.

B in Rücksicht der Beschaffenheit der unbekannten Größen

a einfache Gleichungen, oder vom ersten Grade, erster Ordnung, wenn die unbekannte Größe, nachdem sie kein Divisor mehr ist, auch bey keiner andern unbekannten Größe als Factor vorkömmt, eine einfache Größe ist, also die erste Potenz nicht übersteigt,

b zusammengesetzte, oder höhere Gleichungen wenn die unbekannte Größe die erste Dignität übersteigt; und zwar heißt so eine Gleichung quadratisch, cubisch, biquadratisch u. s. w. je nachdem die höchste Dignität der unbekannten Größe ein Quadrat, Cubus, Biquadrat u. s. f. ist.

Zusatz:

Durch eine Gleichung läßt sich eine und nur eine unbekannte Größe bestimmen; man nennet daher Gleichungen mit einer unbekannten Größe bestimmte, mit mehrern unbekannten Größen unbestimmte Gleichungen.

II. Abschnitt.

Von einfachen Gleichungen.

§. 151.

Aufgabe:

Eine gegebene einfache Gleichung mit einer unbekannten Größe aufzulösen.

Auflösung:

1. Kömmt die unbekannte Größe als Nenner vor, so schaffe man sie nach §. 149. V. Zus. weg.

2. Eben so bringe man alle jene Größen weg, die bey der unbekannten Größe als Nenner stehen.

3. Setze man alle Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten, auf eine, und jene Glieder, die aus gegebenen Größen bestehen, auf die andere Seite (§. 149. I. Zus.).

4. Sammle die Coefficienten der unbekannten Größe in eine Summe, ist diese nun negativ, so ändere man alle Zeichen (149. II. Zus.), und dividire damit endlich beyde Seiten (§. 149. IV. Zus.)

Z. B.

z. B. $\frac{x}{3} + 2x = 35$

$x + 6x = 105$

$7x = 105$

$x = \frac{105}{7} = 15$

Zusatz:

Wenn man für x den gefundenen Werth setzet, so muß die gegebene Gleichung bleiben (§. 148 Zus. c.) und dieses dienet zur Probe für die geschehene Auflösung; so ist im gegebenen Beyspiele:

$\frac{15}{3} + 2 \times 15 = 35.$

§. 152.

Beyspiele zur Uebung:

I. $x + 9 = 16$, mithin $x = 7$

II. $2x + 5 = 17$; $x = 6$

III. $\frac{1}{2}x - 3 = 4$; $x = 14$

IV. $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5$; $x = 6$

V. $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44$; $x = 24$

VI. Ein Both A, der täglich 5 Meilen machet, ist schon 10 Tage weg, nun wird ihm ein anderer B nachgeschicket, der täglich 7 Meilen zurückleget, wann wird er den erstern einholen? d. i.

$7x = 5(10 + x)$, mithin $x = 25$ Tage.

Oder allgemein, wenn A täglich a Meilen machet, und schon c Tage voraus ist, der nachgeschickte Both B täglich b Meilen machet, und erstern in x Tagen einholet, so ist wieder:

$bx = ac + ax$, und $x = \frac{ac}{b-a}$

VII. Es

VII. Es hat jemand einen Wein, wovon ihm die Maß zu 30 kr., und einen andern, wovon ihm solche zu 20 kr. zu stehen kömmt; er möchte nun einen Eymer zu 60 Maß so mischen, daß die Maß 24 kr. gilt, wie viel von jeder Sorte muß er zur Mischung nehmen?

Wenn man die Anzahl der Maße vom bessern Weine x nennet, so ist jene vom schlechten $60 - x$, mithin die Werthe davon $30\,x$; $20\,(60 - x)$, und von der Mischung 24×60, folglich;

$30\,x + 20\,(60 - x) = 24 \times 60$, und $x = 24$ d. i. vom bessern müssen 24 Maß, und vom schlechtern 36 zur Mischung genommen werden.

Allgemein, wenn der Werth vom bessern $= a$, vom geringern Weine $= b$, von der Mischung $= c$, das ganze Gemisch aber $= x$ gesetzet wird; so ist, wenn x den Theil des bessern, also $x - x$ jenen des geringern bezeichnet,

$$a\,x + b\,(x - x) = c; \text{ mithin } x = \frac{c - b}{a - b}$$

Anmerkung:

In dem Beyspiele Nr. VI, wenn von den vier Größen a, b, c, x, und eben so Nr. VII., drey bekannt sind, so läßt sich allemal die vierte unbekannte finden.

§. 153.

§. 153.

Aufgabe:

Den Werth von zwey unbekannten Größen aufzufinden, wenn für solche 2 Gleichungen gegeben sind.

I. Auflösung:

1. Man suche den Werth der einen unbekannten Größe z. B. x aus jeder Gleichung,

2. Setze beyde gefundene Werthe einander gleich, so enthält diese neue Gleichung nur mehr die andere unbekannte Größe z. B. y, so das aus dieser Gleichung die eine x weggeschaffet, oder eliminirt ist;

3. Aus letzterer Gleichung bestimme man y nach §. 151.

II. Auflösung:

1. Man suche aus einer Gleichung den Werth für die eine unbekannte Größe x,

2. Substituire diesen gefundenen Werth für x in der andern Gleichung, so bekömmt man

3. eine neue Gleichung, welche nur die andere unbekannte Größe y enthält, und wieder aus §. 151 aufgelöset werden kann.

III. Auflösung:

1. Man multiplicire mit dem Coefficienten der zu eliminirenden Größe x in der einen Gleichung, die andere Gleichung, und mit jenem der zweyten Gleichung die erste, wenn die zu eliminirenden Größen in beyden Gleichungen Coefficienten, und zwar verschiedene bey sich haben.

2. Nun

2. Nun addire man zur ersten die zweyte Gleichung, wenn in beyden Gleichungen x verschiedene, und subtrahire sie, wenn sie einerley Zeichen hat;

3. Der Rest, oder im zweyten Falle die Summe giebt eine neue dritte Gleichung mit einer unbekannten Größe y, welche wieder nach §. 151 aufgelöset werden kann.

Beyspiel: $x + y = a$; $x - y = b$

I. Auflösung:

$$x = a - y$$
$$x = b + y$$

also $b + y = a - y$

$$2y = a - b$$
$$y = \frac{a - b}{2}$$
$$x = \frac{a + b}{2}$$

II. Auflösung:

$$x = a - y$$
$$(a - y) - y = b$$
$$a - 2y = b$$
$$-2y = b - a$$
$$2y = a - b$$
$$y = \frac{a - b}{2}$$
$$x = \frac{a + b}{2}$$

III. Auflösung:

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$
$$2x = a + b$$
$$x = \frac{a + b}{2}$$

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$
$$+ \quad -$$
$$2y = a - b$$
$$y = \frac{a - b}{2}$$

I. Zusatz: Für zwey unbekannte Größen müssen zwey verschiedene, das ist, zwey solche Gleichungen gegeben seyn, die nicht aus einander gefolgert, sondern jede aus eigenen Bedingungen der unbekannten Größen gebildet sind.

II. Zusatz: Im gegebenen Beyspiele drücken a die Summe, b die Differenz der beyden unbekannten Größen x und y aus, folglich ist es eine andere Auflösung des Lehrsatzes §. 86.

§. 154.

Aufgabe:

Aus drey gegebenen einfachen Gleichungen A, B, C drey unbekannte Größer x. y, z zu finden.

Auflösung:

1. Man eliminire aus den beyden Gleichungen A, B nach §. 153 die eine unbekannte Größe x, so erhält man eine neue Gleichung D mit den beyden übrigen unbekannten Größen y, z.

2. Enthält nun die Gleichung C ebenfalls nur diese zwey unbekannte Größen, so eliminire man wieder aus C u. D die eine y, so kömmt man auf eine Gleichung mit einer unbekannten Größe, welche nach §. 151 aufgelöset werden kann.

3. Sollte aber C ebenfalls alle 3 unbekannte Größen enthalten, so muß man wieder aus A u. C, oder

aus

aus B u. C die Grösse x eliminiren, mithin eine Gleichung E mit zwey unbekannten Grössen y, z bilden.

4. Aus den Gleichungen D und E kömmt man wieder durch Elimination von y auf eine Gleichung F, die ausser z nur gegebene Grössen enthält, folglich aus §. 151 aufgelöset werden kann.

I. Beyspiel.

A) $x + y = a$; B) $x + z = b$; C) $y + z = c$

$x = a - y$; $x = b - z$; $y = c - z$

D) $a - y = b - z$

$-y = -a + b - z$

$y = a - b + z$ mithin

$a - b + z = c - z$

$2z = b + c - a$;

$z = \frac{b+c-a}{2}$ und

$y = c - \frac{b+c-a}{2} = \frac{a+c-b}{2}$; $x = a - \frac{a+c-b}{2} = \frac{a+b-c}{2}$

II. Beyspiel.

A) $x + \frac{y+z}{2} = a$; B) $y + \frac{x+z}{3} = b$; C) $z + \frac{x+y}{4} = c$

$2x + y + z = 2a$, $3y + x + z = 3b$; $4z + x + y = 4c$

$x = \frac{2a - y - z}{2}$, $x = 3b - 3y - z$, $x = 4c - y - 4z$

D) $\frac{2a-y-z}{2} = 3b - 3y - z$; E) $\frac{2a-y-z}{2} = 4c - y - 4z$

$2a - y - z = 6b - 6y - 2z$, $2a - y - z = 8c - 2y - 8z$

$5y = 6b - 2a - z$ $y = 8c - 2a - 7z$

$y = \frac{6b-2a-z}{5}$

F) $\frac{6b-2a-z}{5} = 8c-2a-7z$

$6b-2a-z = 40c-10a-35z$

$34z = 40c-8a-6b$

$z = \frac{40c-8a-6b}{34} = \frac{20c-4a-3b}{17}$

$y = 8c-2a-7 \times \left(\frac{20c-4a-3b}{17}\right)$

$= \frac{136c-34a-140c+28a+21b}{17} = \frac{21b-6a-4c}{17}$

$x = 3b-3 \times \left(\frac{21b-6a-4c}{17}\right) - \frac{20c-4a-3b}{17}$

$= \frac{51b-63b+18a+12c-20c+4a+3b}{17}$

$= \frac{22a-9b-8c}{17}$

Zusatz: Auf ähnliche Art lassen sich aus 4 Gleichungen 4 unbekannte Größen, und überhaupt aus n Gleichungen n unbekannte Größen bestimmen.

III. Abschnitt.

Von quadratischen Gleichungen.

§. 155.

Erklärungen:

Eine zusammengesetzte oder höhere Gleichung (§. 150. B. b.) heißt

a **rein** (aequatio pura), wenn darinn die unbekannte Größe nur in einer Dignität vorkömmt, so ist $x^2 = bq$ eine reine quadratische, und $ax^3 + b = m$ eine reine cubische Gleichung.

b unrein, gemischt, (aequatio adfecta) wenn in solcher die unbekannte Größe mit verschiedenen Exponenten vorkömmt, so ist z. B. $x^2 + px = a$ eine unreine quadratische, und $x^3 + px^2 = m$ eine gemischte cubische Gleichung.

§. 156.

Aufgabe:

Eine bestimmte reine quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung:

1. Man verfahre ganz wie (§. 151.) mit einfachen Gleichungen, und

2. ziehe zu beyden Seiten die Quadratwurzel aus (§. 149. 3.) und gebe solcher die Zeichen $\pm$ (§. 100 I. Zus.) z. B. $2x^2 - 24 = 8$; so ist $x = \pm 4$.

Zusatz: Eine reine quadratische Gleichung hat zwey einander gleiche, aber entgegengesetzte Werthe oder Wurzeln.

§. 157.

Lehrsatz:

Jede unreine quadratische Gleichung läßt sich auf nachstehende Formel bringen: $x^2 + px = q$.

Beweis:

1. Jede quadratische Gleichung läßt sich aus §. 149. so ordnen, daß das Quadrat der unbekannten Größe auf einer Seite positiv nur einmal im Anfange zu stehen kömmt, daß

2. auf

2. auf der nemlichen Seite die einfache unbekannte Größe mit der Summe ihrer Coefficienten, welche man, sie mag positiv, oder negativ seyn, allemal durch p ausdrücken kann, sich befinde, daß endlich

3. auf der andern Seite nur gegebene Größen vorkommen, deren positive oder negative Summe man wieder durch q bezeichnen kann.

§. 158.

Lehrsatz:

In jeder unreinen quadratischen Gleichung ist

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)} = \frac{-p \pm \sqrt{(4q + p^2)}}{2}$$

Beweis:

1. Man ziehe aus der allgemeinen Formel quadratischer Gleichungen nach §. 121. die Wurzel aus, das ist:

$$\begin{array}{rl} x^2 + p\,x & [x + \tfrac{1}{2}p \\ -x^2 & \\ \hline +p\,x & \\ (2\,x) & \\ p\,x + \tfrac{1}{4}p^2 & \end{array}$$

2. Man sieht, daß zum vollständigen Quadrat ein Theil in der gegebenen Gleichung, nemlich das Quadrat vom zweyten Theile der Wurzel fehle, da nun

3. dieser 2te Theil dem halben Coefficienten von x gleich ist, oder $= \tfrac{1}{2}p$, und dessen Quadrat $= \tfrac{1}{4}p^2$, so addire man solches auf beyden Seiten der allgemeinen Formel; so wird $x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = q + \tfrac{1}{4}p^2$ (§. 149. 1.)

x +

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)} = \pm\left(\frac{4q + p^2}{4}\right)$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)} = \frac{-p \pm \sqrt{(4q + p^2)}}{2}$$

Zusatz: Jede unreine quadratische Gleichung hat zwey verschiedene Werthe und Wurzeln die entweder beyde möglich, oder unmöglich sind, je nachdem $4q + p^2$ positiv oder negativ ist (§ 100. III. Zus.)

§. 159.

Aufgabe:

Eine bestimmte gemischte quadratische Gleichung aufzulösen:

Auflösung:

1. Man bringe die gegebene Gleichung auf die Form: $x^2 + px = q$ (§. 157.)
2. Bestimme die Werthe für x aus §. 158, oder $x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)}$

Beyspiel;

$x^2 - 24 = 9 - 8x$

$x^2 + 8x = 33$ Nro. 1.

$x = -4 \pm \sqrt{(33 + 16)} = -4 \pm 7$

§. 160.

Beyspiele zur Uebung:

I. $x^2 + 6x = 91$; so ist: $x = -3 \pm 10$

II. $x^2 - 9 - 100 = 23 - x$; $x = -\tfrac{1}{2} \pm \frac{23}{2}$

III. $x^2 - 3x = 4$; $x = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{5}{2}$

IV. $x^2 + \frac{3}{4}x = 153$; $x = -\frac{3}{8} \pm \frac{22}{8}$

V. $x^2 + bx = m$; $x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{(m + \frac{1}{4}b^2)}$

VI. $x^2 + \frac{a-3d}{n}x = m$; $x = -\frac{a-3d}{2n} \pm \frac{\sqrt{(4mn^2 + a^2 - 6ad + 9d^2)}}{2n}$

§ 161.

Aufgabe:

Zwey Größen suchen, deren Summe, Product, und Differenz ihrer Quadrate einander gleich sind, oder nachstehende Gleichungen aufzulösen:

$$x + y = xy = x^2 - y^2$$

Auflösung:

Man nehme $x^2 - y^2 = x + y$, so ist:

$(x+y)(x-y) = x+y$ (§. 103. Zus.)

$x - y = 1$; also $x = y + 1$

folglich $(y+1)y = y + 1 + y$ (§. 153. II. Aufl.)

$y^2 + y = 2y + 1$

$y^2 - y = 1$

$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(1 + \frac{1}{4})}$ (§. 159.)

$= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$x = 1 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Probe (§. 151. Zus.)

$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$	$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
$y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$	$y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
Summe $x + y = 2 \pm \sqrt{5}$	$\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}$
	$\pm \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{25}$

Product $xy = \frac{3}{4} \pm \frac{4}{4}\sqrt{5} + \frac{5}{4}$

also

also $x\,y = 2 \pm \sqrt{5}$

Endlich $x^2 = \frac{9}{4} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{25}$

$y^2 = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{25}$

$- \quad - \quad + \quad -$

Differenz $x^2 - y^2 = \frac{8}{4} \pm \frac{2}{2}\sqrt{5} = 2 \pm \sqrt{5}$

IV. Abschnitt.

Von der Natur, und Reduction der höhern Gleichungen überhaupt.

§. 162.

Erklärung;

Eine Gleichung heißt **irrational**, wenn in einem, oder mehrern Gliedern derselben die unbekannte Größe unter einem Wurzelzeichen steht, oder zum Exponenten einen ächten Bruch hat; z. B. $a + \sqrt{x} = b$; $b\sqrt[3]{x} - \sqrt[n]{x} = q$, $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}} = m$; im Gegentheile ist die Gleichung **rational**.

§. 163.

Aufgabe:

Eine irrationale Gleichung rational zu machen.

Auflösung:

Man reducire die Gleichung nach §. 149. so, daß die irrationale Größe positiv nur einmal auf einer Seite allein zu stehen kömmt, und erhebe nun die Gleichung

zur Dignität, welche mit der Wurzel den nemlichen Exponenten hat.

Kömmt das Wurzelzeichen mehrmal vor, so muß für jede einzelne Wurzelgröße dieses Verfahren wiederholet werden. Z. B.

I. $a\sqrt{x} = q$

$$\sqrt{x} = \frac{q}{a}$$

$$x = \frac{q^2}{a^2}$$

II. $\sqrt[3]{x} = a + \sqrt{y}$

$$x = a^3 + 3a^2\sqrt{y} + 3ay + y\sqrt{y}$$

$$x - a^3 - 3ay = (3a^2 + y)\sqrt{y}$$

$$\sqrt{y} = \frac{x - a^3 - 3ay}{3a^2 + y}$$

$$y = \left(\frac{x - a^3 - 3ay}{3a^2 + y}\right)^2$$

§. 164.

Erklärung:

Eine rationale bestimmte Gleichung ordnen heißt sie so reduciren, daß

I. die unbekannte Größe nirgend als Nenner vorkömmt,

II. die ganze Gleichung auf o gebracht ist,

III. die höchste Potenz der unbekannten Größe positiv nur einmal im Anfange steht, und dann

IV. die

IV. die niedern Potenzen der unbekannten Größe der Ordnung ihrer Exponenten nach auf einander folgen, und endlich, daß

V. alle Coefficienten in einerley Potenz der unbekannten Größe in eine Summe gebracht sind.

§. 165.

Aufgabe:

Eine gegebene bestimmte Gleichung zu ordnen.

Auflösung:

1. Wenn die Gleichung irrational ist, so bringe man sie auf eine rationale (§. 163),

2. Dieser rationalen Gleichung gebe man aus §. 149 die §. 164 bestimmte Form.

Beyspiel: $\frac{n}{x} - c = 5ax + \frac{dh}{x}$

$$n - cx = 5ax^2 + dh$$

$$5ax^2 + cx + dh - n = 0$$

$$x^2 + \frac{c}{5a}x + \frac{dh - n}{5a} = 0$$

I. Zusatz: Enthält eine Gleichung mehrere unbekannte Größen, oder ist sie unbestimmt, so wird sie nach einer unbekannten Größe geordnet, und die andern als Coefficienten behandelt. Z. B.

$$x^2 + b\,y\,x + c\,y = 0.$$

II. Zu-

II. Zusatz: Bey vollständigen Gleichungen, wenn sie geordnet sind, muß die quadratische aus drey, die cubische aus vier, und jede Gleichung vom nten Grade aus $n+1$ Gliedern bestehen (135).

III. Zusatz: Formulare für höhere Gleichungen sind:

a für quadratische:

$$x^2 + px + q = 0$$

b für cubische:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

c für biquadratische:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

d allgemein für jede Gleichung von der nten Ordnung;

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots\ldots Qx + R = 0$$

IV. Zusatz: Fehlet in einer Gleichung irgend ein Glied, so kann man annehmen, daß die Potenz dieses Gliedes, in einen Coefficienten $= 0$ multiplicirt sey. Z. B. $x^2 + x = 0$, wo $p = 0$, mithin auch $px = 0$ ist.

§. 166.

Aufgabe:

Aus zwey rationalen Gleichungen A, B, deren jede zwey unbekannte Größen x, y enthält, eine dritte Gleichung C zu machen, die wenigstens um einen Grad niedriger ist.

Auf-

Auflösung I, wenn beyde nach x geordnete Gleichungen von einerley Grade sind:

Man suche aus beyden Gleichungen den Werth für die höchste Potenz von x, setze diese Werthe einander gleich, ordne diese neue Gleichung, so ist sie die verlangte C.

Auflösung II, wenn die nach x geordneten Gleichungen von verschiedenem Grade sind:

Man multiplicire die Gleichung vom niedern Grade durch jene Potenz von x, wodurch sie mit der erstern Gleichung gleichen Grad erhält, und verfahre nun wie vorher I.

Beyspiel I.

A) $x^5 - y^2 x^4 + y^3 x = 0$; B) $\frac{x^5}{y^2} - y^2 x^3 + p = 0$

$x^5 = y^2 x^4 - y^3 x$ $\quad$ $x^5 = y^4 x^3 - p y^2$

$y^2 x^4 - y^3 x = y^4 x^3 - p y^2$

C) $x^4 - y^2 x^3 - y x + p = 0$

Beyspiel II.

A) $\frac{x^3}{y} - y x + y = 0$; B) $x^5 - y^3 x^4 + q = 0$

$\frac{x^5}{y} - y x^3 + y x^2 = 0$; $x^5 = y^3 x^4 - q$

$x^5 = y^2 x^3 - y^2 x^2$;

$y^3 x^4 - q = y^2 x^3 - y^2 x^2$

$y^3 x^4 - y^2 x^3 + y^2 x^2 - q = 0$

C) $x^4 - \frac{1}{y} x^3 + \frac{1}{y} x^2 - \frac{1}{y^3} q = 0$

§. 167.

§. 167.

Aufgabe:

Aus zwey Gleichungen A, B, deren jede zwey unbekannte Größen von beliebiger Ordnung enthält, eine neue Gleichung Q bilden, aus welcher die eine unbekannte Größe eliminirt ist.

Auflösung:

1. Aus den beyden Gleichungen A, B mache man eine dritte C, welche um einen Grad niederer als die höchste z. B. A der gegebenen Gleichungen ist (§. 166).

2. Aus C und der niedern gegebenen B bilde man wieder eine Gleichung D, welche um einen Grad niederer als die höchste von diesen beyden;

3. Dieses Verfahren wiederhole man so lange, bis man auf 2 Gleichungen M, N kömmt, deren jede die zu eliminirende Größe nur im ersten Grade enthält.

4. Aus M und N läßt sich endlich nach §. 153 Q finden, mithin eine Größe eliminiren.

Beyspiel:

Man soll aus A und B die Größe y eliminiren.

A) $y^3 = xy^2 + 3x$ B) $y^2 = x^2 - xy - 3$

$y^3 = x^2y - xy^2 - 3y$

C) $xy^2 + 3x = x^2y - xy^2 - 3y$

$2xy^2 = x^2y - 3x - 3y$

$y^2 = \frac{1}{2}xy - \frac{3}{2} - \frac{3y}{2x}$

Diese

Diese Gleichung giebt mit B

D) $x^2 - x\,y - 3 = \frac{1}{2}\,x\,y - \frac{3}{2} - \frac{3\,y}{2\,x}$

$x\,y + \frac{1}{2}\,x\,y - \frac{3\,y}{2\,x} = x^2 - 3 + \frac{3}{2} = x^2 - \frac{3}{2}$

$3\,x^2\,y - 3\,y = 2\,x^3 - 3\,x$

M) $y = \frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}$

$y^2 = \left(\frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}\right)^2$ diese Gleichung giebt

mit B) $x^2 - x\,y - 3 = \left(\frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}\right)^2$

$x\,y = x^2 - 3 - \left(\frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}\right)^2$

N) $y = \frac{x^2 - 3}{x} - \left(\frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}\right)^2 : x$

folglich aus M und N wird endlich

Q) $\frac{x^2 - 3}{x} - \left(\frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}\right)^2 : x = \frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}$

I. Zusatz: Auf eine ähnliche Art mit Zuziehung des §. 154 §. lassen sich aus drey Gleichungen mit 3 unbekannten Grösen zwey davon wegschaffen.

II. Zusatz: Ueberhaupt lassen sich aus n Gleichungen $n - 1$ unbekannte Grösen wegschaffen, folglich eine Gleichung Q bilden, die nur eine beliebige der unbekannten Grösen enthält, und deren Werth also dadurch bestimmt ist.

III. Zu-

III. Zusatz: Eine Aufgabe ist also **bestimmt**, oder alle Werthe der unbekannten Größe sind bestimmt, wenn so viele Gleichungen gegeben sind, als in ihr unbekannte Größen vorkommen; übersteigt die Anzahl der unbekannten Größen jene der Gleichungen, so ist die Aufgabe **unbestimmt**, und im umgekehrten Falle **mehr als bestimmt**.

§. 168.

Erklärung:

Größen, wie $x - a = P$; $x - b = Q$, $x - c = R$ u. s. f., wo die unbekannten Größen den Coefficienten sowohl als Exponenten 1 haben, und positiv sind, hingegen a, b, c u. s. w. alle Arten von Größen bezeichnen können, heißen **einfache Factoren**.

§. 169.

Lehrsatz:

Das Product von zwey einfachen Factoren giebt eine quadratische, von drey eine cubische, von vier Factoren eine biquadratische Gleichung.

Beweis:

Man multiplicire §. 168 den einfachen Factor $P = x - a$ mit $Q = x - b$; das Product mit $R = x - c$, und letzteres mit $S = x - d$, so erhält man:

$x^2 - (a + b)x + ab = PQ$

$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = PQR$

$x^4 - (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + bc + ad + bd + cd)x^2 - (abc + abd + acd + bcd)x + abcd = PQRS$.

I. Zuſatz: So oft ein Product einfacher Factoren nochmal mit einem neuen Factor multiplicirt wird, ſo wächst der Exponent von x um 1, mithin geben n einfache Factoren eine Gleichung vom nten Grade.

II. Zuſatz: Jede dieſer erhaltenen Gleichungen wird $= 0$, wenn einer von den Factoren $= 0$ iſt; ſo z. B. wird die quadratiſche Gleichung $= 0$, wenn entweder $(x - a) = P = 0$ wird, oder aber wenn $(x - b) = Q = 0$ wird.

III. Zuſatz: In obigen Gleichungen kann x ſo viele Werthe haben, oder die Gleichung ſo viele Wurzeln enthalten (§. 148. Zuſ. c), als einfache Factoren vorhanden ſind, denn z. B. die quadratiſche Gleichung wird allemal $= 0$, es mag P, oder Q u. ſ. w. $= 0$ ſeyn, mithin $x - a = 0$, und $x = a$, oder $x - b = 0$; und $x = b$. Folglich wird die Gleichung $= 0$, man mag a, oder b u. ſ. w. für x ſubſtituiren; nur muß man nicht irrig annehmen, daß x zugleich a, und b ſeyn könne, ſondern x kann entweder a, oder es kann b u. ſ. w. ſeyn, und in jedem Falle wird die Gleichung $= 0$.

IV. Zuſatz. In obigen Gleichungen iſt allemal der Coefficient des zweyten Gliedes die Summe aller Wurzeln, der Coefficient des dritten Gliedes die Summe ihrer Amben, jener des 4ten Gliedes enthält alle Ternen der Wurzeln u. ſ. w. Der Coefficient des letzten Gliedes iſt allemal das Product aller Wurzeln.

§. 170.

§. 170.

Lehrsatz:

Jede quadratische Gleichung ist ein Product zwey einfacher Factoren, d. i.

$x^2 + px + q = 0 = (x-a)(x-b) = PQ$ (§. 165 III. Zus. a).

Beweis:

1. $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$

2. Nun setze man: $p = -(a+b)$, und $q = ab$, so lassen sich aus diesen beyden Gleichungen für jeden Werth von p und q allemal die beyden Größen a, und b bestimmen (§. 167. II. Zus.); es ist nemlich

3. $a + b = -p$; also $a = -b - p$

und $a = \frac{q}{b}$; mithin (§. 153. I. Aufl.)

4. $\frac{q}{b} = -b - p$

$q = -b^2 - pb$; oder

$b^2 + pb = -q$, folglich

5. $b = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ (§. 159)

$a = -b - p$ (Nr. 3) $= -p + \frac{1}{2}p \mp \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} =$

$-\frac{1}{2}p \mp \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$

6. Nimmt man daher für beyde Größen das obere Zeichen, so ist

$-a = +\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$

$-b = +\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, mithin

7. $-(a+b) = p$, und

8. $ab = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} - \frac{1}{2}p\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$

$-(\frac{1}{4}p^2 - q)$

$= \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 + q = q$, folglich

8. $o =$

8. $0 = x^2 + px + q = x^2 - (a+b)x + ab$
$= (x-a)(x-b)$ (Nr. 1).

I. Zusatz: Jede quadratische Gleichung enthält zwey Wurzeln a und b; denn sie ist ein Product der beyden Factoren $x-a$, und $x-b$; welches $= 0$ wird, man mag für x die Größe a oder b substituiren (§. 169. III. Zus., und §. 156. §. 158.)

II. Zusatz: In einer quadratischen Gleichung giebt es ausser den zweyen a, b keine andere von diesen verschiedene Wurzeln; denn gäbe es noch andere Wurzeln c, d, folglich $x^2 + px + q = (x-a)(x-b) = (x-c)(x-d) = 0$ wäre, so müßte in den beyden Producten ein Factor $= 0$ seyn, weil das ganze Product $= 0$ ist, mithin z. B. $x - a = 0$, und $x - c = 0$, folglich $x = a = c$, d. i. c ist keine von a unterschiedene Wurzel.

III. Zusatz: In jeder quadratischen Gleichung sind die beyden Wurzeln entweder beyde möglich, oder beyde unmöglich, je nachdem $\frac{1}{4}p^2 - q$ entweder positiv oder negativ ist. Man vergleiche §. 158. Zus.

IV. Zusatz: In jeder quadratischen Gleichung gilt das für die Coefficienten angeführte Gesetz §. 169. IV. Zus.

§. 171.

Lehrsatz:

Jede Gleichung Z vom nten Grade läßt sich in n einfache Factoren auflösen, oder

$Z = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots\ldots$
$\ldots + Px + Q = 0 = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots$

Be-

Beweis:

1. Durch die Multiplication n einfacher Factoren entsteht eine Gleichung, deren erstes Glied $= x^n$ ist

2. Kommen dadurch alle nächstniedere Potenzen von x bis auf x^0 vor, mithin entsteht eine Gleichung von $n + 1$ Gliedern.

3. Setzet man den Coefficienten des zweyten Gliedes $= A$, jenen des dritten $= B$ u. s. f. so bekömmt man zwischen den Coefficienten n Gleichungen, so daß sich allemal daraus n Größen a, b, c u. s. f. bestimmen lassen.

I. Zusatz: Jede Gleichung vom nten Grade enthält n Wurzeln; denn da sie aus n Factoren $(x - a)(x - b)(x - c)\ldots$ besteht, so wird die Gleichung $= 0$, wenn was immer einer von den n Factoren 0 wird, mithin für $x - a = 0$, ist $x = a$, für $(x - b) = 0$, wird $x = b$ u. s. f. man nennt auch so einen Factor eine **Wurzelgleichung**.

II. Zusatz: Wenn man eine Gleichung von nten Grade z. B. $Z = 0$ durch einen einfachen Factor oder **Wurzelgleichung** $(x - a)$ dividirt, so ist der Quotient $Z : (x - a) = Y$ eine Gleichung vom $n - 1$ten Grade.

III. Zusatz: Ausser den gefundenen n Wurzeln a, b, c.... giebt es in einer Gleichung Z vom nten Grade keine von den vorigen verschiedene Wurzel z. B. α; denn wäre α eine Wurzel der Gleichung Z, also

$(x - \alpha)$

$(x-\alpha)=0$; so müßte $Z:(x-\alpha)=Y$ (II. Zuſ.), also $Z=(x-\alpha)\,Y=0$ ſeyn: nun iſt aber auch $Z=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots=0$, einer dieſer Factoren $=0$, man ſetze $x-a=0$, ſo iſt $x-\alpha=x-a$, folglich $\alpha=a$, das heißt α iſt keine von a verſchiedene Wurzel.

§. 172.

Lehrſatz:

Die für die Coefficienten §. 169. IV. Zuſatz angeführten Geſetze gelten allgemein für jede Gleichung.

Beweis:

1. Wenn dieſe Geſetze für jede Gleichung irgend eines Grades gelten, ſo gelten ſie auch bey der Gleichung vom nächſthöhern Grade: nun iſt ihre Giltigkeit für quadratiſche, cubiſche, und biquadratiſche Gleichungen aus §. 169 durch Induction bewieſen, folglich gelten dieſe Geſetze der Coefficienten für die Gleichungen vom fünften, aus dieſen für die Gleichungen von ſechsten, und ſo immer für die Gleichungen vom nächſt höhern Grade.

2. Man nehme nun an, dieſe Geſetze gelten für alle Gleichungen irgend eines Grades n, und multiplicire die Gleichung dieſes Grades mit einer neuen Wurzelgleichung z. B. $x-\alpha$ ſo erhält man im Producte eine Gleichung vom $n+1$ten Grade; das iſt:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Px + Q = Z$$
$$\times (x - \alpha)$$

$$x^{n+1} + \left.\begin{matrix} A \\ -\alpha \end{matrix}\right\} x^n + \left.\begin{matrix} B \\ -A\alpha \end{matrix}\right\} x^{n-1} + \left.\begin{matrix} C \\ -B\alpha \end{matrix}\right\} x^{n-2} + \left.\begin{matrix} \ldots\ldots \\ -C\alpha \end{matrix}\right\} x^{n-3}$$
$$\left.\begin{matrix} + \ldots\ldots + P \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} + Q \\ -P\alpha \end{matrix}\right\} x$$
$$- Q\alpha = Z(x - \alpha)$$

3. Nun finden in dieſer Gleichung $Z.(x - \alpha)$ die angeführten Geſetze der Coefficienten ſtatt, wenn in der vorhergehenden Gleichung Z die Coefficienten dieſen Geſetzen gemäß waren, nemlich:

a. Der Coefficient des zweyten Gliedes beſteht aus der Summe aller Wurzeln; denn wenn A die Summe von n Wurzeln darſtellt, ſo enthält $A - \alpha$ offenbar $n + 1$ Wurzeln.

b. Der Coefficient vom dritten Gliede beſteht aus der Summe aller Amben der Wurzeln; denn enthält B alle Amben von n Wurzeln, ſo faſſet $B - A\alpha$ alle Amben von $n + 1$ Wurzeln (§. 144)

c. auf ähnliche Art erhellet, daß der Coefficient $C - B\alpha$ vom vierten Gliede alle Ternen, u. ſ. f. und überhaupt der Coefficient vom $m + 1$ten Gliede die Summe aller Verbindungen nach m darſtellet, (145 I. Zuſ.)

d. Das

d. Das letzte Glied, oder der Coefficient von x^0 im letzten Gliede ist endlich wieder das Product aller Wurzeln; denn ist Q ein Product aus n Wurzeln, so ist offenbar Q x ein Product aus n + 1 Wurzeln.

4. Da nun der Obersatz von Nr. 1 erwiesen ist, so ist dadurch die Allgemeinheit der Gesetze, mithin der aufgestellte Satz erwiesen.

I. Zusatz: Der Coefficient des zweyten Gliedes ist positiv, negativ, oder Null, je nachdem die Summe der positiven Wurzeln grösser, kleiner, oder gleich der Summe der negativen Wurzeln ist.

II. Zusatz: Fehlet das letzte Glied, so ist eine Wurzel = 0; denn da das letzte Glied das Product aller Wurzeln ist, so muß nothwendig ein Factor davon, eine Wurzel nemlich 0 seyn, wenn das Product = 0 ist.

III. Zusatz: Allemal sind so viele Wurzeln = 0, als letzte Glieder fehlen; denn fehlet das letzte, so ist nach vorigem Zusatze eine Wurzel 0; dividirt man nun mit diesem einfachen Factor, so wird in der neuen Gleichung oder dem Quotienten (§. 171 II. Zus.) das vorige vorletzte nun das letzte Glied, ist also dieses wieder 0, so muß abermal eine Wurzel = 0 seyn, u. s. f.

IV. Zusatz: Wenn das letzte Glied eine mögliche Größe ist, so muß eine Gleichung von ungerader Ordnung

oder von der Ordnung $2n+1$, wenigstens eine reelle Wurzel haben; denn sonst könnte das Product keine mögliche Größe geben, aber bey einer Gleichung von gerader Ordnung können alle Wurzeln imaginär seyn, weil eine gerade Anzahl unmöglicher Factoren doch eine mögliche Größe im Producte geben kann.

V. Zusatz: Die Anzahl der reellen Wurzeln ist bey ungerader Ordnung der Gleichung allemal ungerade, bey gerader Ordnung der Gleichung allemal gerade.

§. 173.

Aufgabe:

Aus einer gegebenen Gleichung, welche alle Potenzen der Ordnung nach enthält, das zweyte Glied wegzuschaffen, das ist, die Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots\ldots + Px + Q = o$ in eine andere vom nemlichen Grade n zu verwandeln, in welcher aber das Glied mit dem Exponenten $n-1$ fehlet.

Auflösung:

1. Man dividire den Coefficienten A des zweyten Gliedes mit dem Exponenten n des ersten Gliedes, und

2. setze $y = x + \frac{A}{n}$, also $x = y - \frac{A}{n}$;

3. Substituire endlich statt x diesen gefundenen Werth in der gegebenen Gleichung, so erhält man die verlangte.

Be-

Beweis:

4. für $x = y - \frac{A}{n}$ wird nach §. 136

$$x^n = y^n - Ay^{n-1} + \frac{n-1}{2n} A^2 y^{n-2} + \ldots\ldots$$

$$Ax^{n-1} = \quad Ay^{n-1} - \frac{n-1}{n} A^2 y^{n-2} + \ldots.$$

$$Bx^{n-2} = \qquad By^{n-2} + \ldots\ldots, \text{ mithin}$$

5. $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots = y^n + \alpha y^{n-1} \beta y^{n-2} + \ldots,$

6. Da nur bey der Substitution der beyden ersten Glieder, das ist nur für x^n, und x^{n-1} eine Potenz y^{n-1} entstehen kann, so ist allemal $\alpha = A - A = 0$, mithin auch $\alpha\, y^{n-1} = 0$, folglich allemal

7. $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots\ldots = y^n + \beta y^{n-2} + \ldots;$ wo offenbar das zweyte Glied fehlet.

I. Beyspiel.

Man soll aus $x^2 - 6x + 5 = 0$ das zweyte Glied eliminiren:

$-6 : 2 = -3$. (Nr 1); $x = y + 3$ (Nr. 2) mithin

$$\begin{array}{rcrcr} x^2 & = & y^2 & + 6y & + 9 \\ -6x & = & & -6y & -18 \\ +5 & = & & & +5 \\ \hline x^2 - 6x + 5 & = & y^2 & -4 & = 0 \end{array}$$

II. Beyspiel.

Man soll aus nachstehender Gleichung das zweyte Glied eliminiren:

$$x^3 + a x^2 + b x + c = o.$$

$x : 3 = \frac{a}{3}$; und $x = y - \frac{a}{3}$, folglich

$$x^3 = y^3 - a y^2 + \frac{a^2 y}{3} - \frac{a^3}{27}$$

$$+ a x^2 = \quad + a y^2 - \frac{2 a^2}{3} y + \frac{a^3}{9}$$

$$+ b x = \quad + b y - \frac{a b}{3}$$

$$+ c = \quad + c$$

$$x^3 + a x^2 + b x + c = y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right) y + \frac{2 a^3}{27} - \frac{a b}{3} + c = o$$

V. Abschnitt.

Von der Auflösung höherer Gleichungen.

§. 174.

Aufgabe:

Von einer gegebenen Gleichung anzugeben, ob alle ihre Wurzeln ganze Zahlen sind, und diese ganze Zahlen selbst in einem solchen Falle zu entdecken.

Auflösung:

1. Da das letzte Glied einer jeden Gleichung aus dem Producte, der Coefficient des zweyten Gliedes aus der Summe aller Wurzeln, so wie die Coefficienten der folgenden Glieder aus der Summe der Amben, Ternen u. s. f., eben dieser Wurzeln bestehen (§. 172), so können die Wurzeln einer Gleichung nur dann lauter ganze Zahlen seyn, wenn das letzte Glied sowohl,

als

als die Coefficienten aller übrigen Glieder ganze Zahlen sind.

2. In diesem Falle zerlege man das letzte Glied in seine Factoren, und substituire

3. in der gegebenen Gleichung für x einen Factor nach dem andern, sowohl mit dem Zeichen +, als −.

4. Bringen nun einer, oder mehrere davon die Gleichung auf 0, so sind sie Wurzeln derselben.

I. Beyspiel: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

In dieser Gleichung sind die ganzen Zahlen, 1, 2, 3, 6 die Factoren des letzten Gliedes, und 1, 2, 3 die drey Wurzeln.

II. Beyspiel: $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

Das letzte Glied 12 besteht aus den Factoren 1, 2, 3, 4, 6, 12, von welchen + 2, − 2, + 3 die drey Wurzeln sind.

Anmerkung: Wenn das letzte Glied eine große Anzahl von Factoren enthält, ist diese Auflösungsmethode zu mühsam, also nicht brauchbar.

§. 175.

Aufgabe:

Die Wurzeln einer quadratischen d. i. nachstehenden Gleichung zu finden:

$$x^2 + px + q = 0$$

I. Auflösung:

1. Fehlet das 2te Glied, oder ist $px = 0$, so löst man solche nach §. 156 auf.

2. Ist hingegen das zweyte Glied vorhanden, so bestimme man die Wurzeln aus §. 159.

II. Auf-

II. Auflösung:

1. Man schaffe das zweyte Glied weg (§. 173).
2. Behandle die neue Gleichung nach §. 156.
3. Aus den gefundenen Werthen von y, bestimme man jene von x.

Beyspiel der II. Auflösung der Gleichung:

$$x^2 + px + q = o$$

$p : 2 = \frac{1}{2}p$; $x = y - \frac{1}{2}p$; mithin

$$x^2 = y^2 - py + \tfrac{1}{4}p^2$$
$$px = \quad + py - \tfrac{1}{2}p^2$$
$$q = \quad\quad + q$$

$$x^2 + px + q = y^2 - \tfrac{1}{4}p^2 + q = o$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - q; \quad y = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$$

folglich $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$

Zusatz: Jede Gleichung von der Form: $x^{2n} + ax^n + b = o$ kann man, wenn $y = x^n$ gesetzt wird, wie eine quadratische Gleichung behandeln; denn man erhält: $x^{2n} + ax^n + b = y^2 + ay + b = o$, welche letztere Gleichung quadratisch ist.

§. 176.

Aufgabe:

Die Wurzeln einer reinen cubischen Gleichung z. B. $x^3 - a = o$, zu finden.

Auflösung:

1. Man reducire die gegebene Gleichung so, daß auf der einen Seite der Cubus der unbekannten Größe positiv, und nur einmal zu stehen kömmt, und auf

der

der andern Seite alle übrige bekannte Größen sich befinden, oder $x^3 = a$;

2. Ziehe zu beyden Seiten die Cubikwurzel aus, so $x = \sqrt[3]{a}$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

3. Man dividire ferner die geordnete Gleichung $x^3 - a = 0$ durch die gefundene Wurzelgleichung $x - \sqrt[3]{a} = 0$, so bekömmt man eine quadratische Gleichung, oder

$$(x^3 - a) : (x - \sqrt[3]{a}) = x^2 + x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}$$

4. Setzet man letztere Gleichung $= 0$, so erhält man nach §. 175 die beyden Wurzeln derselben, die zugleich Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung sind, d. i. $x^2 + x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} = 0$

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{a} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^2})}$$
$$= -\frac{1 \mp \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{a}$$

5. Die unbekannte Größe x kann also in der gegebenen Gleichung jeden dieser 3 Werthe haben, das heißt, man kann statt x die Größe $\sqrt[3]{a}$, oder $-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{a}$, oder aber $-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{a}$ setzen, so entspricht jede den gegebenen Bedingungen der Gleichung.

Beweis:

Beweis:

6. Man setze die 3 Wurzeln der Gleichung α, β, γ (§. 171. I. Aufl.), so sind $x-\alpha, x-\beta, x-\gamma$ die 3 Factoren derselben, oder

$$x^3 - a = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0$$

7. Diese Gleichung ist wahr, wenn was immer für einer der 3 Factoren Null ist, man setze nun $x-\alpha=0$, so ist

8. $x-\alpha = x - \sqrt[3]{a}$ (Nr. 3.), also eine Wurzel $\alpha = \sqrt[3]{a}$.

9. Ferner ist $(x^3-a) : (x-\alpha) = (x-\beta)(x-\gamma)$ (Nr. 6), oder

$$(x^3 - a) : (x - \sqrt[3]{a}) = x^2 + x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}$$
$$(\text{Nr. } 3) = (x-\beta)(x-\gamma)$$

10. Letztere Gleichung, mithin auch auch die gegebene wird ebenfalls 0, wenn einer der beyden Factoren 0 ist, man setze daher

$x^2 + x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} = 0$, so ist

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{a} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^2})} \quad (\S\ 175)$$
$$= -\frac{1 \mp \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{a}, \text{ mithin}$$

11. $\beta = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{a}$ die zweyte, und

$\gamma = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{a}$ die dritte Wurzel der

ge-

gegebenen Gleichung, von welchen aber die beyden letzten unmögliche Größen sind.

Zusatz: Die 3 Wurzeln nachstehender Gleichung $x^3 = 8$ sind also: $\alpha = 2$; $\beta = -1 + \sqrt{-3}$; $\gamma = -1 - \sqrt{-3}$

§. 177.

Aufgabe:

Jede cubische Gleichung aufzulösen, oder die drey Wurzeln nachstehender Gleichung anzugeben.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Auflösung:

1. Man eliminire das zweyte Glied, das ist, man nehme $x = y - \frac{a}{3}$ (§. 173), so wird

2. $x^3 + ax^2 + bx + c = y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right) y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$.

3. Man setze nun der Kürze wegen $b - \frac{a^2}{3} = -f$; $\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = -g$, so ist $y^3 - fy - g = 0$, oder $y^3 = fy + g$

wo aus der gegebenen Gleichung die Größen f, g bekannt sind.

4. Setzet man endlich noch $y = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$, also

$$y^3 = p + 3\sqrt[3]{p^2 q} + 3\sqrt[3]{pq^2} + q$$
$$= 3\sqrt[3]{pq}\left(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}\right) + p + q$$
$$= 3y\sqrt[3]{pq} + p + q, \text{ so wird}$$

5.

5. $fy+g=3y\sqrt[3]{pq}+p+q$ (Nr. 3), woraus man

6. nachstehende zwey Gleichungen bestimmt:

$3\sqrt[3]{pq}=f$; $p+q=g$, aus welchen sich p, q finden lassen (§. 167), es ist nemlich

7. $27pq=f^3$; $pq=\frac{1}{27}f^3$, also

$4pq=\frac{4}{27}f^3$

8. ferner $p^2+2pq+q^2=g^2$

$4pq=\frac{4}{27}f^3$ also

9. $p^2-2pq+q^2=g^2-\frac{4}{27}f^3$, und

$p-q=\sqrt{(g^2-\frac{4}{27}f^3)}$

10. Da also $p+q=g$ (Nr. 6), und $p-q=\sqrt{(g^2-\frac{4}{27}f^3)}$, so ist aus §. 86

$p=\frac{1}{2}g+\frac{1}{2}\sqrt{(g^2-\frac{4}{27}f^3)}$

$q=\frac{1}{2}g-\frac{1}{2}\sqrt{(g^2-\frac{4}{27}f^3)}$, folglich

11. $y=\sqrt[3]{[\frac{1}{2}g+\frac{1}{2}\sqrt{(g^2-\frac{4}{27}f^3)}]}+\sqrt[3]{[\frac{1}{2}g-\frac{1}{2}\sqrt{(g^2-\frac{4}{27}f^3)}]}$ (N. 4.)

12. Aus dem gefundenen Werthe von y bestimme man jenen von $x=y-\frac{a}{3}$, so erhält man eine Wurzelgleichung derselben;

13. Man dividire endlich die gegebene Gleichung durch die gefundene Wurzelgleichung, und bestimme aus dem Quotienten, welcher eine quadratische Gleichung seyn wird (§. 171. II. Zus.) die übrigen zwey Wurzeln der Gleichung, so sind alle drey Wurzeln (§. 171. I. Zus.) gefunden, mithin die Aufgabe aufgelöset.

An-

I. Anmerkung: Diese Auflösung erfanden Scipio Ferreus von Bononien, und Nicolaus Tartalia, und Cardan machte sie in seiner Algebra bekannt, daher sie dann Cardans Regel heißt.

II. Anmerkung: Wenn f eine positive, mithin $-\frac{4}{27}f^3$ eine negative Größe, und überdieß $\frac{4}{27}f^3 > g^2$, so ist $\sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}$ eine unmögliche Größe, man muß daher, um den Werth von y (Nr. 21) anzugeben, die beyden Glieder $\sqrt[3]{[\frac{1}{2}g + \frac{1}{2}\sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}]}$; $\sqrt[3]{[\frac{1}{2}g - \frac{1}{2}\sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}]}$ nach §. 141 in Reihen auflösen, wo sich dann die unmöglichen Glieder in der einen Reihe gegen eben dieselben in der andern Reihe, indem sie entgegengesetzte Zeichen erhalten, aufheben. Durch Anwendung der Trigonometrie erhält man für den gegenwärtigen Fall eine leichtere Auflösungsmethode, die sich aber hier nicht anführen läßt. Man sehe Klügels math. Wörterbuch I. Abth. I. Theil. Artikel: Anwendung der Geometrie auf die Algebra.

Zusatz:

Jede Gleichung von der Form: $x^{3n} + ax^{2n} + bx^n + c = 0$ läßt sich wie eine cubische behandeln; denn man setze $x^n = y$; so wird $x^{3n} + ax^{2n} + bx^n + c = y^3 + ay^2 + by + c = 0$.

§. 178.

Aufgabe:

Die vier Wurzeln einer reinen biquadratischen Gleichung zu suchen.

Auf-

Auflösung:

1. Man ziehe aus der gegebenen Gleichung Quadratwurzel aus, so erhält man zwey quadratische Gleichungen.
2. Aus jeder dieser Gleichungen ziehe man aufs neue die Quadratwurzel aus, so bekommt man aus jeder zwey, also im Ganzen die vier verlangten Wurzeln der gegebenen biquadratischen Gleichung.

Z. B. $x^4 - a = 0$; also $x^4 = a$; und $x^2 = \pm\sqrt{a}$

Nro. 1. oder $x^2 = +\sqrt{a}$; mithin $x = \pm\sqrt[4]{a}$

ebenso $x^2 = -\sqrt{a}$; also $x = \pm\sqrt{(-\sqrt{a})} = \pm\sqrt{(-a^{\frac{1}{2}})} = \pm\sqrt{(a^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{-1})} = \pm\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{-1}$

Folglich hat x folgende 4 Werthe:

$+\sqrt[4]{a}, -\sqrt[4]{a}; +\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}; -\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$

wovon zwey möglich, und zwey unmöglich sind.

Für die Gleichung $x^4 - 16 = 0$ sind die vier Wurzeln $+2; -2; +2\sqrt{-1}; -2\sqrt{-1}$.

§. 179.

Lehrsatz:

Wenn p, q, r die drey Wurzeln für die allgemeine Form cubischer Gleichungen: $Z^3 - fZ^2 + gZ - h = 0$ sind, so ist $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ eine Wurzel einer jeden biquadratischen Gleichung, in welcher das zweyte Glied fehlet.

Beweis:

1. Sind p, q, r die drey Wurzeln der cubischen Gleichung: $Z^3 - fZ^2 + gZ - h = 0$, so muß

2. $p + q + r = f$; $pq + pr + qr = g$; $pqr = h$ seyn (§. 172.)

3. Man

3. Man ſetze $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; ſo iſt

$x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} = f + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$;

$x^2 - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$;

$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{p^2qr} + 8\sqrt{pq^2r} + 8\sqrt{pqr^2} = 4g + 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}) = 4g + 8\sqrt{h} \times x$;

$x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0$

4. Dieſe Gleichung iſt eine allgemeine Formel für jede biquadratiſche Gleichung, deren zweytes Glied fehlet, und eine Wurzel dieſer Gleichung iſt $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$.

Zuſatz: Da jede Quadratwurzel zwey Werthe hat, das iſt von $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ jede poſitiv, oder negativ ſeyn kann, ſo ſind durch $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ allemal alle vier Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung auf einmal gefunden; denn allemal muß $\sqrt{pqr} = \sqrt{h}$ ſeyn, wenn nun $\sqrt{h}$ poſitiv iſt, ſo kann x folgende 4 Werthe haben: $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; $\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$; $-\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$; $-\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$; iſt hingegen $\sqrt{h}$ negativ, ſo ſind die vier Werthe von x: $\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$; $\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$; $-\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; $-\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$; In jedem ſpeciellen Falle iſt nun allemal beſtimmt; ob $\sqrt{h}$ poſitiv oder negativ zu nehmen ſey, mithin allemal gegeben, welche 4 Wurzeln zu nehmen ſeyen.

§. 180.

§. 180.

Aufgabe:

Die vier Wurzeln einer biquadratischen Gleichung zu suchen, d. i. nachstehende Gleichung aufzulösen.

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

Auflösung:

1. Man eliminire aus dieser Gleichung das zweyte Glied (§. 173), das ist, man bringe sie auf nachstehende Form: $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$

2. Subsumire diese unter nachstehende des 179. §. oder $x^4 - ax^2 - bx - c = x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0$; so ist $2f = a$; mithin $f = \frac{1}{2}a$;

$8\sqrt{h} = b$; $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$; $h = \frac{b^2}{64}$.

$f^2 - 4g = -c = \frac{1}{4}a^2 - 4g$; $g = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}c$

3. Aus diesen gefundenen Werthen von f, h, g bilde man die cubische Gleichung: $Z^3 - fz^2 + gz - h = 0$ (§. 179.), und bestimme ihre drey Wurzeln p, q, r aus §. 177.

4. So erhält man die verlangten vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung Nro. 1. indem man $x = +\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ setzt, wo zugleich aus $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$ bestimmt ist, welche Werthe aus §. 179 Zus. man nehmen soll.

5. Weil endlich $y = x - \frac{1}{4}A$ (§. 173.), so sind auch alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung gefunden, mithin die Aufgabe aufgelöset.

Anmerkung. Für höhere, als biquadratische Gleichungen hat man noch zur Zeit keine allgemeine Auflösungsmethode in der Algebra.

§. 182.

§. 181.

Erklärungen:

a Gränzen einer Wurzel heißen jene Zahlen, zwischen welchen eine Wurzel der Gleichung fällt;

b Gränzen der Wurzeln sind jene Zahlen, zwischen welchen alle Wurzeln einer Gleichung fallen.

§. 182.

Aufgabe:

Die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden.

Auflösung:

Es giebt hier verschiedene Methoden, wovon nur eine hier angeführt wird, nemlich durch Versetzung der Glieder, und selbst diese, da sie durch die Natur der gegebenen Coefficienten verschieden modificirt wird, läßt sich nur in einem Beyspiele verständlich machen, z. B. $x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 4 = 0$

1. Man übersetze das negative Glied auf die andere Seite der Gleichung, $x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 4 = 10x^3$;

2. Offenbar ist nun $x^5 < 10x^3$; oder $x^2 < 10$, mithin $x < \sqrt{10}$; oder $x < 3,2 \ldots$.

3. Ebenso ist $2x^4 < 10x^3$; und $2x < 10$; und $x < 5$.

4. Ferner $2x^2 < 10x^3$; also $1 < 5x$; mithin $x > \frac{1}{5}$; oder $x > 0,2$.

5. Endlich ist $10x^3 > 4$; und $x^3 > 0,4$, folglich $x > 0,7$

folglich sind 0,7 und 3,2 die nächsten Gränzen, zwischen welchen die positiven Wurzeln fallen.

§. 183.

§. 183.

Aufgabe:

Die Wurzeln einer Gleichung durch Annäherung zu finden.

Auflösung:

1. Es sey entweder durch §. 174 oder §. 182. eine Zahl n gefunden, die für x substituirt die Gleichung beynahe auf o bringt, aber es sey noch $x > n$.
2. Man nehme $x = n + p$, so wird p ein ächter Bruch seyn, dessen Potenzen also, da es ohnehin nur auf eine Annäherung ankömmt, im Verhältnisse zu n weggelassen werden können.
3. Man substituire in der gegebenen Gleichung für x die Größe $n + p$, lasse die Potenzen von p weg, und bestimme den Werth von p aus dieser Gleichung, so wird $n + p$ der Wurzel näher kommen.
4. Man setze nun in der Gleichung statt x den gefundenen Werth von $n + p$, und wenn diese Wurzel noch zu klein ist, so suche man durch Wiederholung des vorigen Verfahrens, in dem man wieder $(n + p) = x$ nimmt, und abermal p bestimmet, eine Größe $n + p$, die der wahren Wurzel näher kömmt.

I. Beyspiel: $x^2 = a$

$x^2 = n^2 + 2np + p^2 = n^2 + 2np = a$

Folglich $p = \frac{a - n^2}{2n}$, und $x = n + \frac{a - n^2}{2n} = \frac{n^2 + a}{2n}$

So ist für $x^2 = 5$; $n = 2$; $p = \frac{5-4}{4} = \frac{1}{4}$;

$x = 2 + \frac{1}{4} = 2,25$

Wiederholet man dieses Verfahren, d. i. setzet man aufs neue $n = 2,25$; so wird $x = 2,2360 \ldots$.

II. Bey-

II. Beyſpiel. $x^2 + ax - b = 0$

für x, $n + p$ ſubſtituirt, giebt:

$x^2 + ax - b = n^2 + 2np + p^2 + an + ap - b = 0$,

oder $2np + ap = b - n^2 - an$; $p = \frac{b - n^2 - an}{2n + a}$

Folglich $x = n + \frac{b - n^2 - an}{2n + a} = \frac{n^2 + b}{2n + a}$

III. Beyſpiel: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

für $x = n + p$ erhält man

$x^3 + ax^2 + bx + c = n^3 + 3n^2 p + 3np^2 + p^3$
$+ an^2 + 2anp + ap^2 + bn + bp + c = 0$;

$3n^2 p + 2anp + bp = -n^3 - an^2 - bn - c$;

$p = -\frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3n^2 + 2an + b}$

$x = n - \frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3n^2 + 2an + b} = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3n^2 + 2an + b}$

Zuſatz: Wenn die gefundene Zahl n zu groß iſt, ſo ſetze man $x = n - p$, und beſtimme p wie vorher; wo man für x die nemliche Formel erhält wie für $x = n + p$.

VI. Abſchnitt.

Von Functionen.

§. 184.

Erklärungen:

a Eine Größe heißt beſtändig (constans) wenn ſie immer einerley Werth behält, z. B. die durch Ziffern bezeichnete Zahlen;

b sie ist hingegen **unbeständig**, oder **veränderlich** (variabilis), wenn sie jeden Werth, selbst jenen von 0 annehmen kann.

c Wenn man veränderliche mit beständigen Grösen vergleicht, so bezeichnet man erstere durch die Endesbuchstaben x, y, z, u. s. f. die zweyten durch die ersten Buchstaben a, b, c des Alphabethes.

Anmerkung. Hier werden also die Anfangs- und Endesbuchstaben des Alphabethes in einer andern Bedeutung, als §. 148 Zus. genommen.

§. 185.

Erklärung:

Eine **Function** (functio) einer veränderlichen Grösse z. B. x heißt jeder Ausdruck, der auf irgend eine Art aus dieser veränderlichen Grösse, und aus beständigen Grösen besteht, z. B. $a+3x$; $ax+4x^2$; $ax+b\sqrt{(a^2-x^2)}$; a^x; u. s. f. sind Functionen von x.

I. Zusatz: Jede Function einer veränderlichen Grösse x ist selbst eine veränderliche Grösse; denn da man für die veränderliche Grösse x jeden beliebigen Werth substituiren kann, so erhält dadurch die Function selbst jedesmal einen andern Werth, z. B. $3+x=P$, so ist die Function von x, nemlich P veränderlich; denn P erhält die Werthe 3, 4, 5, 6 u. s. f. je nachdem man für x, 0, 1, 2, 3 setzet.

II. Zusatz: Ausdrücke, die zwar die äussere Form einer Function haben, aber einer beständigen Grösse gleich sind, gehören eigentlich nicht zu den Functionen, z. B. $x^0=1$; $1^x=1$; $\frac{a^2-ax}{a-x}=a$.

III. Zu-

III. Zuſatz: Da ſich in einer Gleichung von zwey unbekannten Gröſſen allemal eine durch die andere beſtimmen läßt, ſo wird, wenn y eine Function von x iſt, auch umgekehrt x eine Function von y ſeyn; das iſt, wenn in einer Gleichung y durch x und beſtändige Gröſſen beſtimmet iſt, ſo läßt ſich aus dieſer Gleichung eine andere herleiten, in welcher x durch y und beſtändige Gröſſen beſtimmet, mithin eine Function von y iſt.

Z. B. $ax + by + c = o$, giebt $y = \frac{-ax-c}{b}$;

$x = \frac{-by-c}{a}$.

IV. Zuſatz: Subſtituiret man in der Gleichung $ax^2 + bx + cy^2 + dy + exy + f = o$ für $d + ex$, P; für $ax^2 + bx + f$, aber Q, ſo erhält obige Gleichung die Form: $cy^2 + Py + Q = o$, in welcher P ſowohl als Q Functionen von x, in Rückſicht der Gleichung aber nur Glieder ſind; man darf daher Functionen mit Gleichungen nicht verwechſeln.

§. 186.

Erklärungen:

Eine Function heißt

a. algebraiſch, wenn ſie ſich in eine Gleichung von beſtimmter Ordnung aufldſen läßt, ſo daß nemlich jedem beſtimmten Werthe der veränderlichen Gröſſe, ein oder mehrere beſtimmte Werthe der Function ſelbſt entſprechen: z. B. $Z^5 = x^2 + bx + a$, wo für jeden Werth von x der Function Z fünf beſtimmte Werthe zukommen; (§. 171. 1. Zuſ.)

transcendent hingegen, wenn das Gegentheil Statt hat, wo also allemal eine Gleichung von unendlichen Abmessungen erforderlich ist, z. B. $Z = a + b x + b x^2 + \ldots\ldots\ldots r x^{\infty}$

b. einförmig (uniformis) oder vielförmig (multiformi), je nachdem der Function für jeden bestimmten Werth der veränderlichen Größe nur ein, oder mehrere bestimmte Werthe zukommen, z. B. $a x + b = y$, ist eine einförmige Function von x, denn für jeden Werth von x gehört zu y nur ein Werth; hingegen $a x - x^2 = y^2$; $a x^3 + b x = y^3$ sind vielförmige Functionen, und zwar erstere eine zweyförmige, weil y für jeden Werth von x zwey, letztere eine dreyförmige Function, weil jedem Werthe von x, drey Werthe der Function y entsprechen.

c. entwickelt (explicita) oder verwickelt (implicita), je nachdem sie sich durch algebraische Operationen von den veränderlichen Größen absondern läßt, oder nicht; so wenn Z eine Function der veränderlichen Größen x y u. s. f. ist, und man sie in einer Gleichung so darstellen kann, daß auf einer Seite Z allein, auf der andern alle übrige veränderliche Größen x, y zu stehen kommen, so heißt Z eine entwickelte Function, kann man aber durch alle bekannte algebraische Operationen Z nie so in einer Gleichung abgesondert darstellen, so ist Z eine verwickelte Function. Z. B. $Z^2 = 2 a x Z - b y^3$; wo $Z = a x \pm \sqrt{(a^2 x^2 - b y^3)}$ (§. 159.) eine entwickelte Function von x ist; hingegen in der Gleichung $Z^5 - 2c^2 Z^4 x^2 + 5 a b Z^3 x^5 - 6 b^2 x^7 Z = 5 c x^3$ ist die Größe Z eine ver-

verwickelte Function von x, weil sich die Größe Z von x nicht absondern läßt. (§. 180. Anmerk.)

§. 187.

Erklärungen:

a **Irrational** heißt eine algebraische Function, wenn die veränderliche Größe mit einem gebrochenen Exponenten, oder einem Wurzelzeichen vorkömmt; z. B.

$z = b x^{\frac{3}{4}}$; $a + \sqrt{(a^2 - x^2)}$; im Gegentheile heißt sie

b **Rational**, z. B. $a x^3 - b x^4$; und zwar

α eine ganze rationale Function, wenn die Exponenten der veränderlichen Größen ganze positive Zahlen sind, und sie selbst nie als Nenner, oder Divisoren vorkommen,

β eine gebrochene rationale Function, wenn die veränderlichen Größen als Divisoren vorkommen, oder ihre Exponenten ganze negative Zahlen sind, z. B.

$\frac{a}{a + x}$; $a + b x^{-2}$

§. 188.

Erklärungen:

Zwey Functionen mit einander verglichen

a haben **einerley Form**, wenn sie immer in einerley Gliedern die nemlichen Potenzen eben derselben veränderlichen Größe enthalten, z. B.

$Z = a + b x + c x^2 + d x^3 + \ldots\ldots m x^n$

$Y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots\ldots \mu x^n$

b sind

b sind einander ähnlich, wenn die veränderlichen Grösen mit eben denselben beständigen Grösen auf einerley Art verknüpfet sind. Z. B.

$$Z = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots mx^n$$
$$Y = a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots\ldots my^n$$

§. 189.

Lehrsatz:

Wird die Function: $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = o$ für jeden Werth von x allemal $= o$; so müssen alle Coefficienten $= o$ seyn.

Beweis:

1. Da man für x alle Werthe, mithin auch o setzen kann; so werden dadurch alle Glieder der Reihe, die x enthalten $= o$, aber die ganze Reihe wird nur erst dann $= o$, wenn auch $a = o$ ist, mithin
$$bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots = o.$$
2. Man dividire alle Glieder mit x, so erhält man:
$b + cx + dx^2 + \ldots = o$,
wo wieder die ganze Function, mithin auch $b = o$ seyn muß; daher: $cx + dx^2 + \ldots\ldots = o$
3. dividirt man wieder mit x, so findet man, daß c und bey fortgesetzter Operation, daß d u. s. f. mithin, daß alle Coefficienten unter angenommener Bedingung der Function $= o$ seyn müßen.

§. 190.

Lehrsatz:

In jeder Function von nachstehender Form:

$$Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + Dx^{m+3d} + \ldots\ldots = o$$

es

es mögen die Exponenten ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen seyn, sind alle Coefficienten = o.

Beweis:

1. Man dividire den ganzen Ausdruck durch x^m, so wird $A + Bx^d + Cx^{2d} + Dx^{3d} + \ldots\ldots = o$ wo offenbar $A = o$, (§. 189. Nro. 1.)

2. In der Reihe; $Bx^d + Cx^{2d} + Dx^{3d} + \ldots = o$ wenn d eine positive Zahl ist, so setze man $x^d = y$ so wird $By + Cy^2 + Dy^3 + \ldots = o$, wo wieder alle Coefficienten = o sind, (§. 189.)

3. Bezeichnet d eine negative Zahl z. B. $-e$, so nehme man $\frac{1}{x} = y$; $x^d = \frac{1}{x^e} = y^e$, so verwandelt sich die Reihe $Bx^d + Cx^{2d} + Dx^{3d} + \ldots = o$ in nachstehende $By^e + Cy^{2e} + Dy^{3e} + \ldots = o$

4. Man dividire alle Glieder durch y^e so wird $B + Cy^e + Dy^{2e} + \ldots\ldots = o$ woraus sich wie §. 189 auf ähnliche Art ergiebt, daß B und so auch C, D u. s. f. = o seyn müssen.

§. 191.

Aufgabe:

Die gebrochene Function $\frac{1}{a+x}$ in eine unendliche Reihe aufzulösen.

Auf-

Auflösung:

1. Man setze: $\frac{1}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$ In dieser angenommenen Reihe kann x im ersten Gliede nicht vorkommen, weil die Function für $x = 0$ nicht verschwindet, sondern $= \frac{1}{a}$ wird.

2. Um nun die Coefficienten der angenommenen Reihe zu bestimmen, reducire man die Gleichung auf 0 (§. 149. III. Zus.) d. i.

$$1 = aA + aB\}x + aC\}x^2 + aD\}x^3 + \ldots\ldots$$
$$+ A\} + B\} + C\}$$
$$0 = aA - 1 + (aB + A)x + (aC + B)x^2 + (aD + C)x^3 + \ldots$$

3. Da nun alle Coefficienten $= 0$ sind (§. 189) so ist

$aA - 1 = 0$, mithin $A = \frac{1}{a}$;

$aB + A = 0$; $\quad B = -\frac{A}{a} = -\frac{1}{a^2}$

$aC + B = 0$; $\quad C = -\frac{B}{a} = +\frac{1}{a^3}$

$aD + C = 0$; $\quad D = -\frac{C}{a} = -\frac{1}{a^4}$

und so lassen sich alle Coefficienten der Nro. 1 angenommenen Reihe bestimmen.

4. Substituirt man in solcher die Werthe, so wird

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots\ldots$$

I. Zuſatz: Auf die nemliche Art wenn man

$$\frac{1}{a-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

ſetzet, ſo findet man

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4} + \ldots\ldots$$

II. Zuſatz: In der Reihe für $\frac{1}{a+x}$ iſt das allgemeine Glied $\pm \frac{x^{n-1}}{a^n}$; und für $\frac{1}{a-x}$ iſt ſolches $+ \frac{x^{n-1}}{a^n}$ und beyde dieſe Ausdrücke ſind wieder Functionen von n.

III. Zuſatz: Beyde obige Reihen findet man auch, wenn man 1 durch $a + x$ oder $a - x$ dividirt, (§. 109): oder wenn man gleich in dieſem 109ten §. für a die Zahl 1, ſtatt $b + c$ aber $a + x$ ſubſtituirt, oder im erſten Zuſ. allda wieder $a = 1$; und $b - c = a - x$ ſetzet.

IV. Zuſatz: Der Bruch $\frac{1}{a+x}$ läßt ſich auch in eine unendliche Reihe verwandeln, wenn man

$$\frac{1}{a+x} = A + Bx^{-1} + Cx^{-2} + Dx^{-3} + Ex^{-4} + \ldots\ldots$$

ſetzet; denn man bringe dieſe Gleichung auf 0, ſo iſt:

Folglich

$$\frac{1}{1+y} = \frac{1}{1+x+x^3} = 1 - x + x^2 - 2x^3 + 3x^4 - \ldots$$

§. 192.

Aufgabe:

Die irrationale Function $\sqrt{(a+x)}$ in eine unendliche Reihe aufzulösen.

Auflösung:

1. Man setze $\sqrt{(a+x)} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots\ldots$

2. So wird nach §. 163

$$a + x = A^2 + 2ABx + B^2 \left.\begin{matrix}\\ \\ +2AC\end{matrix}\right\}x^2 \left.\begin{matrix}+2BC\\ +2AD\end{matrix}\right\}x^3$$

$$\left.\begin{matrix}+C^2\\ +2BD\\ +2AE\end{matrix}\right\}x^4 + \ldots\ldots$$

$$0 = A^2 - a + 2AB\left.\begin{matrix}\\ \\ -1\end{matrix}\right\}x + B^2 \left.\begin{matrix}\\ \\ +2AC\end{matrix}\right\}x^2 \left.\begin{matrix}+2BC\\ +2AD\end{matrix}\right\}x^3$$

$$\left.\begin{matrix}+C^2\\ +2BD\\ +2AE\end{matrix}\right\}x^4 + \ldots\ldots$$

3. Folglich $A^2 - a = 0$, und $A^2 = a$; $A = a^{\frac{1}{2}}$

4. $2AB - 1 = 0$; $B = \frac{1}{2A} = + \frac{1}{2 \cdot a^{\frac{1}{2}}}$

5. $B^2 + 2AC = 0$; $C = -\frac{B^2}{2A} = -\frac{1}{4a} : 2a^{\frac{1}{2}}$

$$= -\frac{1}{2 \cdot 4\, a^{\frac{3}{2}}}$$

6.

6. $2BC + 2AD = 0$; $D = -\frac{2BC}{2A} = -\frac{BC}{A} =$

$$-\left(\frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}} \times -\frac{1}{2.4.a^{\frac{3}{2}}}\right) : a^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2.4.2a^{\frac{4}{2}}} : a^{\frac{1}{2}} = \frac{1.3}{2.4.6a^{\frac{5}{2}}}$$

7. $C^2 + 2BD + 2AE = 0$; $E = -\frac{C^2 + 2BD}{2A} =$

$$-\left(\frac{1}{2.2.4.4a^{\frac{5}{2}}} + \frac{1.3}{2.4.6a^{\frac{6}{2}}}\right) : 2a^{\frac{1}{2}} =$$

$$-\left(\frac{1.6}{2.4.6.8a^{\frac{6}{2}}} + \frac{1.3.8}{2.4.6.8a^{\frac{6}{2}}}\right) : 2a^{\frac{1}{2}} =$$

$$-\frac{30}{2.4.6.8a^{\frac{6}{2}}} : 2a^{\frac{1}{2}} = -\frac{15}{2.4.6.8a^{\frac{7}{2}}} =$$

$$-\frac{1.3.5}{2.4.6.8a^{\frac{7}{2}}}$$

8. Mithin wird,

$$\sqrt{(a+x)} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{2.4a^{\frac{3}{2}}} +$$

$$\frac{1.3x^3}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.x^4}{2.4.6.8.a^{\frac{7}{2}}} + \ldots\ldots$$

Beyspiel:

Man verlanget $\sqrt{1,1}$; so setze man $a = 1$; $x = 0,1$

und $\sqrt{1,1} = 1 + \frac{0,1}{2} - \frac{0,01}{2.4} + \frac{1.3.0.001}{2.4.6}$

$$-\frac{1.3.5.0,0001}{2.4.6.8} + \ldots\ldots$$

Da-

Davon sind die positiven Glieder;

1,
0,05
0,0000625
0,0000002734375

1,0500627734375

Die negativen Glieder:

— 0,00125
— 0,00000390625
— 0,00000002050....

— 0,00125392675

Das ist: + 1,05006277343
— 0,00125392675

$\sqrt{1,1} = 1,04880884668 \ldots$.

Zusatz: Man findet die nemliche Reihe für $\sqrt{(a+x)}$ wenn man entweder nach §. 121 die Wurzel auszieht, oder aber $\sqrt{(a+x)} = (a+x)^{\frac{1}{2}}$ nimmt, und nach §. 141 verfährt. Eben so bekömmt man im gegebenen Beyspiele die nemliche Wurzel aus §. 126 oder §. 141.

§. 193.

Aufgabe:

Aus einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Grösen x, y z. B.

$$y^3 + a^2 y + a x y - 2 a^3 - x^3 = 0$$

die eine Grösse y durch eine Reihe, deren Glieder nach Potenzen von x geordnet sind, und deren Gestalt gegeben ist, z. B.

$$y = A + B x + C x^2 + D x^3 + \ldots$$

zu finden.

Auf-

Auflösung:

1. Man bestimme aus der Reihe die Werthe für die in der gegebenen Gleichung vorkommenden Potenzen von y, hier für y^3, so ist

$$y^3 = A^3 + 3A^2Bx + 3AB^2 \left.\begin{matrix} \\ \\ +3A^2C \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +B^3 \\ +6ABC \\ +3A^2D \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots$$

2. Nun substituire man diese Werthe für y^3 und y in der gegebenen Gleichung, d. i.

$$\left.\begin{matrix} y^3 = A^3 + 3A^2B \\ \\ \\ a^2y = a^2A + a^2B \\ axy = \quad + aA \\ -2a^3 = -2a^3 \\ -x^3 = \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +3AB^2 \\ +3A^2C \\ x \\ +a^2C \\ +aB \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +B^3 \\ +6ABC \\ x^2 + 3A^2D \\ +a^2D \\ +aC \\ -1 \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots = 0$$

3. bestimme die Coefficienten aus (§. 189) nemlich

4. $A^3 + a^2A - 2a^3 = 0$; man suche den Werth von A entweder aus §. 177, oder durch Versuch, so findet man einen Werth für $A = a$, und wenn durch $A - a = 0$ die Gleichung dividirt wird, so erhält man zum Quotienten die quadratische Gleichung: $A^2 + aA + 2a^2 = 0$, aus welcher man die übrigen zwey Werthe für A findet, nemlich $A = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - 2a^2)}$ (§. 175.), welche beyde unmöglich sind, man nimmt daher den möglichen, oder $A = a$.

5. $3A^2B + a^2B + a^2A = 0$; nemlich $3a^2B + a^2B + a^2 = 0$; $4a^2B + a^2 = 0$; $4B + 1 = 0$; $B = -\frac{1}{4}$.

6.

6. $3AB^2 + 3A^2C + a^2C + aB = 0$, oder
$3aB^2 + 3a^2C + a^2C + aB = 0$
$\frac{3}{16}a + 4a^2C - \frac{1}{16}a = 0$
$4a^2C - \frac{1}{16}a = 0$; $4aC - \frac{1}{16} = 0$;
$C = \frac{1}{64 \cdot a}$

7. $B^3 + 6ABC + 3A^2D + a^2D + aC - 1 = 0$
$-\frac{1}{64} - \frac{6a}{4 \cdot 64 \cdot a} + 3a^2D + a^2D + \frac{a}{64a} - 1 = 0$
$-\frac{5}{64 \cdot 2} + 4a^2D - \frac{63}{64} = 0$.
$4a^2D = \frac{131}{128}$; $D = \frac{131}{512\,a^2}$.

8. Man substituire die gefundenen Werthe der Coefficienten in der gegebenen Reihe, so wird
$y = a - \frac{1}{4}x + \frac{x^2}{64a} - \frac{131x^3}{512a^2} + \ldots$

Anmerkung:
Die Auflösungen von den Aufgaben §. 191 — 193 setzen zum Voraus, daß man die Exponenten in den gesuchten Reihen, das ist, ihre Form schon wisse, und daß man nur noch die Coefficienten zu bestimmen habe, um nun jedesmal dieser angenommenen Reihe die gehörige Gestalt zu ertheilen, dient das Newtonianische Parallelogramm; dessen Theorie aber außer der Sphäre des gegenwärtigen Lehrbuches liegt.

V. Hauptstück.

Von Verhältnissen.

1. Abschnitt.

Von Verhältnissen überhaupt.

§. 194.

Erklärungen:

a. Die Bestimmung der Größe eines Dinges a durch Vergleichung mit einem andern b heißt ein mathematisches Verhältniß (ratio mathematica).

b. Die durch das Verhältniß bestimmte Größe x nennet man den Exponenten, Verhältnißzeiger, die Dinge a, b, welche als Größen mit einander verglichen werden, die Glieder (termini) des Verhältnisses, und zwar

α. das erste oder voranstehende, das Vorderglied (antecedens),

β. das zweyte oder nachstehende, das Hinterglied (conseqnens).

c. Ein Verhältniß heißt abnehmend oder zunehmend, je nachdem das Hinterglied kleiner, oder größer als das Vorderglied ist.

§. 195.

Erklärungen:

a. Die Bestimmung der Zahl d, welche angiebt, um wie viel die eine Größe a kleiner, oder größer als die andere b ist, oder die Vergleichung zweyer Größen durch Subtraction heißt ein arithmetisches Verhältniß;

b. Das Zeichen des arithmetischen Verhältnisses ist (—), welches man zwischen die Glieder setzet, d. i. a — b.

I. Zusatz: Im arithmetischen Verhältnisse müssen die Glieder gleichartig seyn (§. 29. II. Zus.).

II. Zusatz: Die Größe des arithmetischen Verhältnisses ist durch die Größe des Exponenten, d. i. des Unterschiedes d bestimmt, und Verhältnisse von gleichen Exponenten sind einander gleich, d. i.:

$7 - 2 = 9 - 4$; wo in beyden Verhältnissen der Exponent $d = 5$ ist.

III. Zusatz: Zwey Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich; denn da jedes mit dem dritten den nemlichen Exponenten d hat, so ist auch d der gemeinschaftliche Exponent für beyde erste Verhältnisse.

IV. Zusatz: Das arithmetische Verhältniß zweyer gleichartigen, und durch einerley Maaß bestimmten Größen, ist dem Verhältnisse der Zahlen gleich, die ihnen als Coefficienten voranstehen, d. i.

$ma - na = m - n$

und 7 Schuhe — 2 Schuhe $= 7 - 2$

V. Zusatz: Jedes arithmetische Verhältniß läßt sich auf ein Verhältniß bloßer Zahlen reduciren.

§ 196.

§. 196.

Lehrsatz:

Jedes arithmetische Verhältniß ist unter nachstehender Formel enthalten: $a - a + d$.

Beweis:

1. Offenbar kann a jedes Vorder-, und b jedes Hinterglied, mithin $a - b$ jedes arithmetische Verhältniß bezeichnen.
2. Nun ziehe man vom Hinterglieds b das Vorderglied a ab, so wird ihr Unterschied d eine negative oder positive Zahl seyn, je nachdem das Verhältniß ab- oder zunimmt, (§. 38.) d. i. $b - a = d$, und $b = a + d$ (§. 29. I. Zus.).
3. Setzet man endlich für b N. r. den so eben gefundenen Werth $a + d$, so erhält man $x = a + d$ als den allgemeinen Ausdruck eines jeden arithmetischen Verhältnisses.

§. 197.

Erklärungen:

a. Die Bestimmung der Zahl $\pm m$, oder wie und wie oft die Größe a, oder ein aliquoter Theil derselben genommen werden muß, um die Größe b zu erzeugen, heißt ein geometrisches Verhältniß, so wie die Zahl $\pm m$ der Exponent desselben.

b. Das geometrische Verhältniß heißt rational, oder irrational, je nachdem der Exponent desselben, oder m eine Rational- oder Irrationalzahl ist (§. 98).

c. Das Zeichen des geometrischen Verhältnisses ist (:), welches man zwischen die Glieder setzet, d. i. a:b.

I. Zusatz: Im geometrischen Verhältnisse muß entweder das Vorderglied a, oder dessen Gegentheil, m mal genommen das Hinterglied b erzeugen, mithin ersteres mit letzterm gleichartig seyn; ferner bekömmt der Exponent m das Zeichen + oder —, je nachdem die beyden Glieder gleiche, oder verschiedene Zeichen haben; und umgekehrt, wenn der Exponent das Zeichen + vor sich hat, so müssen beyde Glieder gleiche, und wenn der Exponent das Zeichen — vor sich hat, so müssen beyde Glieder verschiedene Zeichen haben, das ist

für + a : + 5 a; ist m = + 5
+ a : — 5 a; m = — 5
— a : + 5 a; m = — 5
— a : — 5 a; m = + 5

Denn allemal ist das Product des ersten Gliedes in den Exponenten dem zweyten Gliede gleich (§. 60. Zus.)

II. Zusatz: Im geometrischen rationalen Verhältnisse wird eine Größe b durch die andere a, oder ihren Gegentheil ganz genommen, oder einen aliquoten Theil derselben gemessen (§. 1. d.); daher heißen die Größen a und b commensurable Größen.

III. Zusatz: Wenn zwey Größen a, b in einem irrationalen Verhältnisse stehen, so läßt sich die eine b durch die andere a, oder ihren Gegentheil, weder ganz, noch einen aliquoten Theil derselben genommen, genau messen; man nennet daher solche Größen incommensurable Größen. Man kann aber von der einen Größe a oder ihrem Gegentheile immer kleinere aliquote Theile als Maaß nehmen, wodurch

die

die andere Größe b um so genauer gemessen wird, je kleiner der aliquote Theil, oder das gebrauchte Maaß angenommen ist, und so läßt sich ein rationales Verhältniß finden, welches dem gegebenen irrationalen zwischen a und b so nahe kömmt, daß man solches ohne merklichen Unterschied dafür setzen darf, oder wie man sich ausdrückt, jedes irrationale Verhältniß läßt sich durch Annäherung auf ein rationales, und die beyden incommensurablen Größen auf commensurable reduciren.

IV. Zusatz: Jedes geometrische Verhältniß läßt sich durch a : ma ausdrücken; denn, wenn m den Exponenten bezeichnet, so ist b = ma, folglich das Verhältniß a : b = a : ma, wo aber m eine ganze oder gebrochene Zahl ist, je nachdem das Verhältniß ab- oder zunimmt, ferner positiv oder negativ, je nachdem die Glieder gleiche, oder verschiedene Zeichen haben.

V. Zusatz: Die Größe des geometrischen Verhältnisses ist durch die Größe des Exponenten bestimmet, und Verhältnisse von gleichen Exponenten sind gleich, z. B. 6 : 2 = 24 : 8, wenn gleiche Verhältnisse eben denselben Exponenten haben, so daß nicht nur die Größe, sondern auch das Zeichen des Exponenten für alle das nemliche ist, so heissen sie gleiche übereinstimmige Verhältnisse, z. B.

+2 ; +6 ; −2 : −6 ; +8 : +24 ; wo m = +3 ist, oder

+2 : −6 ; −2 : +6 ; +8 : −24 ; wo m = −3 ist.

Wenn hingegen bey zwey gleichen Verhältnissen der Exponent verschiedene Zeichen hat, so heißen sie gleiche entgegengesetzte Verhältnisse, z. B. +2 : +6 ;

+2 :

$+z : -6$, wo im erstern $+3$ im letztern -3 der Exponent ist. Unter gleichen Verhältnissen werden in der Folge nur übereinstimmige verstanden.

VI. Zusatz: Zwey geometrische Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich; denn wenn sie mit dem dritten den nemlichen Exponenten m haben, so ist solcher auch den beyden Verhältnissen gemeinschaftlich, und folglich sind beyde Verhältnisse einander gleich.

VII. Zusatz: Das geometrische Verhältniß zweyer Größen, die durch einerley Maaß bestimmet sind, ist dem Verhältnisse der Zahlen gleich, die bey ihnen als Coefficienten voranstehen, d. i.

$$ma : na = m : n, \text{ oder}$$
$$24 \text{ fl.} : 8 \text{ fl.} = 24 : 8$$

VIII. Zusatz: Jedes geometrische Verhältniß zweyer gleichartigen Größen läßt sich auf das Verhältniß bloßer Zahlen reduciren. (III. u. VII. Zus.).

IX. Zusatz: Man erhält in jedem geometrischen Verhältnisse von bloßen Zahlen den Exponenten, wenn man das Hinterglied durch das Vorderglied dividirt; oder, $ma : a = m$ (IV. Zus.); das geometrische Verhältniß der Zahlen ist also ihre Vergleichung durch Division; daher mag es kommen, daß man zum geometrischen Verhältnißzeichen (§. 197.) das Divisionszeichen wählte.

Anmerkung. Multiplication, Division, und geometrisches Verhältniß unterscheiden sich dadurch, daß man bey der Multiplication aus dem gegebenen Multiplicand und Multiplicator das Product, bey der

Divi-

Division aus dem gegebenen Producte, und Multiplicator, oder Divisor, den Multiplicand, oder Quotienten (§. 48), bey einem geometrischen Verhältnisse endlich aus dem gegebenen Multiplicand, und Producte, oder den beyden Gliedern, den Multiplicator oder Exponenten suchet.

§. 198.

Lehrsatz:

Das geometrische Verhältniß zweyer Zahlen bleibt unverändert, wenn man mit einer ganzen Zahl die beyden Glieder entweder

I. multiplicirt, d. i. $na : nb = a : b$, oder

II. dividirt, d. i. $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = a : b$.

Beweis:

von I. und II.

Man setze $\frac{b}{a} = m$ (§. 197. IX. Zus.),

so ist auch $\frac{nb}{na} = m$; und $\frac{b:n}{a:n} = m$ (§. 50. Zus.)

folglich $na : nb = a : b$; und $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = a : b$ (§. 197. V. Zus.).

I. Zusatz: Das Verhältniß zweyer Brüche ist dem Verhältnisse ihrer Zähler gleich, wenn man sie unter einerley Benennung bringt: d. i.:

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{ps}{qs} : \frac{qr}{qs} = ps : qr;$$

folglich läßt sich das Verhältniß zweyer Brüche allemal auf das Verhältniß ganzer Zahlen bringen.

II. Zu-

II. Zusatz: Zwey Irrationalzahlen können in einem rationalen geometrischen Verhältnisse stehen, z. B.

$$4\sqrt{3} : 2\sqrt{3} = 4 : 2$$

III. Zusatz: Da man durch Annäherung Irrationalzahlen auf rationale bringen kann (§. 133. I. Zus.), so läßt sich jedes Irrationalverhältniß der Zahlen auf ein rationales durch Annäherung reduciren.

IV. Zusatz: Da sich alle geometrische Verhältnisse auf Verhältnisse von bloßen Zahlen (§. 197. VIII. Zus.), alle Verhältnisse der Zahlen auf jene von ganzen Zahlen (I. u. III. Zus.) bringen lassen, so läßt sich jedes geometrische Verhältniß auf ein Verhältniß ganzer Zahlen reduciren.

§. 199.

Erklärungen:

Zwey gleiche übereinstimmige Verhältnisse geben eine Proportion, und zwar

a. eine arithmetische, wenn beyde Verhältnisse arithmetisch,

b. eine geometrische, wenn sie beyde geometrische Verhältnisse sind.

I. Zusatz: Jede Proportion besteht aus 4 Gliedern, nemlich aus zwey Vorder- und zwey Hintergliedern.

II. Zusatz: Da sich die Verhältnisse allgemein auf Verhältnisse blosser Zahlen reduciren lassen. (§. 195. V. Zus. und §. 197. VIII. Zus.) so gilt dieses auch von Proportionen.

III. Zusatz: Jede geometrische Proportion läßt sich auf eine von ganzen Zahlen reduciren (§. 198. V. Zus.)

§. 200.

§. 200.

Erklärungen:

Man nennet in einer Proportion

a. das erste und letzte Glied zusammen die äussersten Glieder (termini extremi),

b. das zweyte und dritte die mittleren Glieder (termini medii),

c. die beyden Vorder- oder die beyden Hinterglieder homologe, gleichnamige Glieder (termini homologi),

d. die Proportion selbst discret oder stättig, je nachdem die beyden mittleren Glieder ungleich oder gleich sind.

§. 201.

Erklärungen:

a. Eine Menge von Zahlen, die in gleichen stättigen arithmetischen Verhältnissen fortgehen, wo also zwischen einem Gliede und seinem darauf folgenden immer einerley Unterschied ist, heißt eine arithmetische Reihe oder Progression, z. B.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 u. s. w., wo d immer = 2 ist.

b. Sind die Verhältnisse dieser Zahlen geometrisch, so heißt diese Menge eine geometrische Reihe oder Progression, wo also alle Verhältnisse den nemlichen Exponenten m haben. z. B.

2, 4, 8, 16, 32, 64 u. s. f.

wo m = 2 der gemeinschaftliche Exponent ist (§. 110.).

Zusatz:

Zusatz: In jeder arithmetischen oder geometrischen Reihe sind alle Glieder, außer dem letzten, Vordergleder, und eben so alle Glieder mit Ausnahme des ersten, Hinterglieder.

II. Abschnitt.

Von arithmetischen Proportionen und Progressionen der Zahlen.

§. 202.

Lehrsatz:

Jede arithmetische Proportion läßt sich durch nachstehende Formel ausdrücken:

$$a - a + d = b - b + d$$

Beweis:

Offenbar kann man die beyden Vorderglieder in jeder arithmetischen Proportion durch a, b, und den Exponenten, oder Unterschied, der in beyden Verhältnissen gleich ist (§. 199.), mit d bezeichnen; so werden die beyden Hinterglieder a + d, und b + d (§. 196), folglich der allgemeine Ausdruck für jede arithmetische Proportion:

$$a - a + d = b - b + d.$$

I. Zusatz: Das Formular für jede stättige arithmetische Proportion ist: $a - a + d - a + 2d$; denn, wenn man in der allgemeinen Formel $b = a + d$ substituirt (§. 200 d.), so bekömmt man für die stättige: $a - a + d = a + d - a + 2d$, oder wenn man der Kürze wegen eines der mittern Glieder wegläßt, $a - a + d - a + 2d$.

II. Zu-

II. Zuſatz: In der diſcreten arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der äußeren Glieder jener der mittleren gleich; denn offenbar, wenn $a-a+d=b-b+d$; ſo iſt $a+b+d=a+b+d$.

Z. B. wenn $7-3=9-5$; ſo iſt $7+5=3+9=12$.

III. Zuſatz: In der ſtättigen arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der äußeren Glieder dem doppelten mittleren Gliede gleich; denn wenn $a-a+d-a+2d$, ſo iſt $2a+2d=2(a+d)$

z. B. wenn $9-7-5$; ſo iſt $9+5=2\times 7=14$.

IV. Zuſatz: Wenn die Summe zweyer Zahlen der Summe von zwey andern gleich iſt, ſo ſtehen dieſe vier Zahlen allemal in arithmetiſcher Proportion, wenn man die beyden Zahlen der einen Summe zu äußeren, und die der andern zu mittleren Gliedern nimmt; das iſt: wenn $a+f=b+c$: ſo iſt $a-b=c-f$; oder auch $f-b=c-a$.

Denn wenn $a+f=b+c$, ſo iſt

$a-b=c-f$, und $f-b=c-a$ (§. 149. I. Zuſ.), z. B. wenn $7+3=6+4$; ſo iſt $7-6=4-3$; $3-6=4-7$.

V. Zuſatz: Wenn die Summe zweyer Zahlen dem Duplo einer andern gleich iſt, ſo iſt letztere die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zwiſchen den beyden erſten; d. i., wenn $a+c=2b$; ſo iſt $a-b-c$; oder auch $c-b-a$; denn wenn $a+c=2b=b+b$ ſo iſt $a-b=b-c$; und $c-b=b-a$ (IV. Zuſ.)

z. B. da $8+4=2\times 6$; ſo iſt $8-6-4$; $4-6-8$.

§. 203.

§. 203.

Aufgabe:

Zu drey gegebenen Zahlen die vierte arithmetische Proportionalzahl finden.

Auflösung:

1. Da nicht nur die drey Zahlen, sondern auch die Ordnung, nach welcher sie als Glieder in der Proportion stehen sollen, gegeben seyn muß, so schreibe man an die Stelle des fehlenden Gliedes x,

2. setze die Summe der äußeren Glieder jener der mittleren gleich (§. 202. II. Zus.);

3. aus dieser Gleichung bestimme man x (§. 151.) als die gesuchte Zahl.

I. Beyspiel.

Zu den Zahlen 7, 5, 10 die vierte arithmetische Proportionalzahl suchen, wenn die Zahlen obige Ordnung beybehalten, mithin die gesuchte Zahl das vierte Glied in der Proportion werden soll.

Auflösung:

$7-5=10-x$; $7+x=15$; $x=15-7=8$.

II. Beyspiel.

Sollen hingegen die gegebenen Zahlen in nachstehender Ordnung 7, 10, 5 so aufeinander folgen, daß die gesuchte Zahl das dritte Glied der Proportion werden soll, so ist

$7-10=x-5$; $10+x=12$; $x=2$.

§. 204.

Aufgabe:

Zu zwey gegebenen Zahlen die dritte arithmetiſche Proportionalzahl finden.

Auflöſung:

1. Da nebſt den beyden Zahlen auch die Stellen, welche ihnen in der Proportion zukommen, gegeben ſeyn müſſen, ſo ſchreibe man an den Platz des fehlenden Gliedes x,
2. Bilde aus der Summe der äußeren Glieder und dem doppelten mitleren eine Gleichung (§. 202. III. Zuſ.)
3. Aus letzterer beſtimme man x (§. 151.) als die geſuchte Proportionalzahl.

I. Beyſpiel.

Zu den Zahlen 5, 7 die dritte Proportionahlzahl finden. wenn die Zahlen in der gegebenen Ordnung auf einander folgen, alſo die geſuchte Zahl das dritte Glied werden ſoll.

Auflöſung:

$$5 - 7 - x;\ 5 + x = 14;\ x = 9.$$

II. Beyſpiel.

Wenn die geſuchte Zahl das mittlere Glied werden ſoll.

Auflöſung:

$$5 - x - 7;\ 2x = 12;\ x = 6.$$

Zuſatz: Die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zweyer Zahlen iſt ihrer halben Summe gleich.

§. 205.

Lehrſatz:

Jede arithmetiſche Reihe iſt unter nachſtehender Formel enthalten:

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ a + 4d \ldots .$$

Beweis:

1. Wenn a das erste Glied, und d die allen Verhältnissen gemeinschaftliche Differenz (§. 201. a.) bezeichnen, so drückt a — a + d jedesmal das erste Verhältniß der gegebenen Reihe aus (§. 196.).

2. Da nun das zweyte Glied a + d zugleich ein Vorderglied ist (§. 201. Zus.), so findet man sein Hinterglied, oder das dritte Glied der Reihe, wenn man dem 2ten d addirt, mithin = a + 2d.

3. Aus diesem dritten Gliede findet man aus den nemlichen Gründen das vierte, wenn man solchem d addirt, also = a + 3d; und so bekömmt man jedesmal aus einem gegebenen Gliede sein folgendes durch Addition des Unterschiedes d; folglich enthält die aufgestellte Formel den allgemeinen Ausdruck einer jeden arithmetischen Reihe.

I. Zusatz: Jedes Glied einer arithmetischen Reihe besteht aus der Summe des ersten Gliedes, und der so vielfachen Differenz, als Glieder vorangehen, folglich ist das nte, oder allgemeine Glied = a + (n — 1) d (§. 110.).

II. Zusatz: Bezeichnet n die Anzahl der Glieder, und u das letzte Glied, so giebt der eben angeführte Ausdruck des allgemeinen Gliedes das letzte; d. i.

u = a + (n — 1) d.

III. Zusatz: Der vollständige Ausdruck jeder arithmetischen Reihe für jede Anzahl n der Glieder ist:

a, a + d, a + 2d, a + 3d, ... a + (n — 2) d, a + (n — 1) d.

§. 206.

§. 206.

Lehrſatz:

In jeder arithmetiſchen Reihe iſt die Summe jeder zwey vom erſten und letzten gleichweit abſtehenden Glieder der Summe des erſten und letzten Gliedes gleich.

Beweis:

1. Für die Anzahl n der Glieder iſt die Summe des erſten und letzten Gliedes, oder
$a + u = 2a + (n - 1)\,d$ (§. 205. III. Zuſ.)
2. Das zweyte Glied $a + d$ iſt vom erſten a um d unterſchieden; hingegen iſt auch das vorletzte $a + (n-2)\,d$ vom letzten um das nemliche d verſchieden; das zweyte Glied wächſt um d, und das vorletzte nimmt um d ab, mithin iſt ihre Summe $= 2a + (n-1)\,d = a + u$.
3. So wie nun vorwärts jedes folgende Glied immer um d wächſt, ſo nimmt rückwärts jedes Glied um d ab, nur muß man nicht vergeſſen, daß d poſitiv oder negativ ſeyn kann (§. 196. Nr. 2.); mithin allzeit die Summe jedes ſolchen Paares der Glieder $= 2a + (n-1)\,d = a + u$.

z. B. in der Reihe: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 iſt immer $2 + 16 = 4 + 14 = 6 + 12 = 8 + 10 = 18$.

§. 207.

Lehrſatz:

Bey ungerader Anzahl der Glieder einer arithmetiſchen Reihe iſt das mittlere Glied m der halben Summe vom erſten und letzten Gliede gleich, d. i.

$$m = \frac{a + u}{2}$$

Beweis:

1. Bezeichnet n wie bisher die Anzahl der Glieder, mithin im gegenwärtigen Falle eine ungerade Zahl, so ist das mittlere Glied weggerechnet $n - 1$ eine gerade Zahl.

2. Von diesen $n - 1$ Gliedern gehen nun offenbar die Hälfte, oder $\frac{n-1}{2}$ Glieder dem mittleren voran folglich ist

3. $m = a + \frac{n-1}{2} d$ (§. 205. I. Zus.) $= \frac{2a + (n-1)d}{2}$

$= \frac{a+u}{2}$ (§. 206. Nr. 1.).

§. 208.

Lehrsatz:

In jeder arithmetischen Reihe ist die Summe aller Glieder dem Producte aus der Summe des ersten und letzten Gliedes in die halbe Anzahl der Glieder gleich,

d. i. $s = (a+u)\frac{n}{2}$

Beweis: I. Fall, wenn die Anzahl der Glieder oder n eine gerade Zahl ist.

1. Nach §. 206. ist jedes Paar vom ersten und letzten gleichweit abstehender Glieder $= a + u$.

2. Man erhält aber offenbar die Summe der Reihe, oder aller Glieder, wenn man die Anzahl aller dieser Paare nimmt.

3. Nun giebt es $\frac{n}{2}$ solcher Paare, mithin ist die Summe der Reihe, oder $s = (a+u)\frac{n}{2}$

Beweis.

Beweis. 1) Fall, wenn die Anzahl der Glieder, oder n eine ungerade Zahl ist.

1. Nimmt man das mittlere Glied weg, so ist die Anzahl der bleibenden Glieder $n-1$ gerad,

2. Von diesen ist wieder jedes Paar vom ersten und letzten gleichweit abstehender Glieder $= a+u$.

3. Die Summe aller dieser Paare, deren es $\frac{n-1}{2}$ gibt, enthält die Summe aller Glieder außer dem mittleren m, mithin ist: $s = (a+u)\frac{n-1}{2} + m = \frac{na+nu-a-u}{2} + m$.

4. Da aber $m = \frac{a+u}{2}$ (§. 207.); so wird

$$s = \frac{na+nu-a-u}{2} + \frac{a+u}{2} = \frac{na+nu}{2} = (a+u)\frac{n}{2}.$$

I. Zusatz: Vermittels der zwey Gleichungen: $u = a+(n-1)d$ (§. 205. II. Zus.) und $s = (a+u)\frac{n}{2}$ lassen sich von den 5 Stücken a, u, d, n, s, wenn deren drey bekannt sind, die übrigen zwey durch Rechnung finden. (§. 153. I. Zus. und §. 167).

II. Zusatz: Da von den 5 Stücken einer arithmetischen Reihe allemal drey gegeben seyn müssen, so sind in dieser Rücksicht 10 verschiedene Fälle möglich (§. 145.), und weil von den übrigen zwey unbekannten Größen jede die gesuchte seyn kann, so ist die Anzahl aller möglichen Aufgaben $= 20$

§. 209.

Einige Aufgaben zur Uebung.

I. Aufgabe:

Aus dem ersten Gliede, der Differenz und Anzahl der Glieder, das letzte Glied einer arithmetischen Reihe, d. i. aus a, d, n die Grösse von u bestimmen.

Auflösung:

$u = a + (n - 1)\, d$ (§. 205. II. Zus.)

Beyspiel:

Wie groß ist die siebente ungerade Zahl?

Auflösung:

Aus der Natur der ungeraden Zahlen erhellet, daß sie eine arithmetische Reihe bilden, deren erstes Glied $a = 1$, der Unterschied $d = 2$, und im gegebenen Beyspiele ist die Anzahl der Glieder $n = 7$, mithin ist die gesuchte ungerade 7te Zahl als das letzte Glied $u = 1 + (7 - 1) \times 2 = 1 + 12 = 13$.

II. Aufgabe:

Aus dem gegebenen letzten Gliede, der Differenz und Anzahl der Glieder das erste Glied, d. i. aus u, d, n, die Grösse von a finden.

Auflösung:

Da $u = a + (n - 1)\, d$ (§. 205. II. Zus.),
so ist $a = u - (n - 1)\, d$.

Beyspiel:

Wie groß ist das erste Glied einer abnehmenden arithmetischen Reihe, deren letztes Glied $= 2$, der Unterschied $= 2$, und die Anzahl der Glieder $= 7$ ist?

Auf-

Auflösung:

Bey abnehmender Reihe ist d eine negative Größe (§. 196. Nr. 2.); mithin wird.

$a = 2 + (7-1)\,2$ (§. 38.) $= 2 + 12 = 14$.

III. Aufgabe:

Aus dem ersten Gliede, dem Unterschiede, und der Anzahl der Glieder die Summe, d. i. aus a, d, n die Größe von s bestimmen.

Auflösung:

Da das letzte Glied oder u nicht unter den gegebenen begriffen, aber durch $u = a + (n-1)\,d$ aus den gegebenen Stücken bestimmet ist, so substituire man diesen Werth in der Gleichung für s, oder $s = (a+u)\frac{n}{2}$ (§. 208.), und man erhält dafür

$s = (a+a+(n-1)d)\frac{n}{2} = (2a+nd-d)\frac{n}{2} = na + \frac{1}{2}n^2d - \frac{1}{2}nd.$

wo s durch lauter gegebene Dinge bestimmet ist.

1. Beyspiel.

Wie groß ist die Summe von n ungeraden Zahlen?

Auflösung:

In diesem Beyspiele ist gemäß der Natur ungerader Zahlen $a = 1$, $d = 2$; hingegen bleibt n noch unbestimmt, und man suchet eine allgemeine Formel für die Summe einer beliebigen Anzahl ungerader Zahlen; mithin wird

$s = n + n^2 - n = n^2$; das ist:

Man erhält diese Summe allemal, wenn man die Zahl n, welche die Anzahl der Glieder angiebt, zum

Quadrat erhebt; so ist die Summe der ersten 8 ungeraden Zahlen $= 8^2 = 64$.

Zusatz: Man findet daher umgekehrt das Quadrat einer jeden ganzen Zahl, wenn man der Ordnung nach so viele ungerade Zahlen zusammen addirt, als die gegebene Zahl Einheiten enthält.

2. Beyspiel:

Ein Stein fällt von einem Thurme während 5 Secunden auf den Boden, wie hoch ist der Thurm?

Auflösung:

Aus der Erfahrung weiß man, daß ein Körper im freyen Falle in der ersten Secunde beynahe 15 Pariser Fuß, in der zweyten 45 Fuß u. s. f. zurücklege, mithin seine während einer bestimmten Anzahl Secunden durchlaufenen Räume eine arithmetische Reihe bilden, wo $a = 15$ Fuß; $d = 30$ F., und n die Anzahl der Secunden, während welchen er fällt, und welche hier also $= 5$ ist; man sucht nun s.

$$s = 75 + \tfrac{1}{2} \times 25 \times 30 - \tfrac{1}{2} \times 5 \times 30$$
$$= 75 + 25 \times 15 - 5 \times 15$$
$$= 75 + 375 - 75 = 375 \text{ Pariser Fuß.}$$

IV. Aufgabe:

Aus dem ersten Gliede, dem Unterschiede, und der Summe die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe, d. i. aus a, d, s die Zahl n bestimmen.

Auflösung:

Man nehme die Formel aus der vorhergehenden Aufgabe, wo s durch a, d, n bestimmet ist, d. i.:

$$an + \tfrac{1}{2}n^2 d - \tfrac{1}{2}nd = s$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nach §. 159. die gesuchte Zahl n bestimmen, d. i.

$$2an + n^2d - nd = 2s$$

$$dn^2 + (2a - d)n = 2s$$

$$n^2 + \frac{2a-d}{d}n = \frac{2s}{d}, \text{ mithin}$$

$$n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{4a^2 - 4ad + d^2}{4d^2}\right)}$$

$$= -\frac{a}{d} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)}$$

Beyspiel:

Ein Thurm ist 240 Pariser Fuß hoch, wie viele Secunden verfließen, bis ein Stein von demselben auf den Boden fällt?

Auflösung:

Gegeben sind also wieder $a = 15$, $d = 30$, $s = 240$, und man sucht die Anzahl n der Glieder der Reihe, welche zugleich die Anzahl der Secunden bestimmet; nun ist $\frac{a}{d} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, mithin $\frac{a^2}{d^2} = \frac{1}{4}$, folglich:

$$n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2 \times 240}{30} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)}$$

$$n = \pm\sqrt{16} = 4 \text{ Secunden.}$$

III. Abſchnitt.

Von geometriſchen Proportionen der Zahlen.

§. 210.

Lehrſatz:

Jede geometriſche Proportion iſt unter nachſtehender Formel enthalten:

$$a : ma = b : mb.$$

Beweis:

1. Offenbar können a, b die Vorderglieder, ſo wie m den gemeinſchaftlichen Exponenten der beyden Verhältniſſe darſtellen (§. 197. V. Zuſ.).
2. Nun bekommt man jedes Hinterglied, wenn man das Vorderglied mit dem Exponenten des Verhältniſſes multiplicirt (§. 197. IV. Zuſ.), daher ſind die beyden Hinterglieder ma, mb; folglich
3. iſt der allgemeine Ausdruck für jede geometriſche Proportion: $a : ma = b : mb$.

I. Zuſatz: Jede geometriſche ſtättige Proportion läßt ſich durch $a : ma : m^2a$ ausdrücken; denn wenn man in der allgemeinen Formel $b = ma$ ſetzet, ſo bekommt man $a : ma = ma : m^2a$, und durch Weglaſſung eines der beyden mittleren Glieder $a : ma : m^2a$.

II. Zuſatz: Iſt in einer geometriſchen Proportion das erſte Glied dem zweyten gleich, ſo iſt auch das dritte dem vierten gleich; denn wenn $a = ma$, ſo iſt $m = 1$, mithin $b = mb$; iſt hingegen das erſte Glied größer als das zweyte, ſo iſt auch das dritte größer als das vierte; denn wenn $a > ma$, ſo iſt m ein ächter Bruch, mithin < 1, und $b > mb$. Iſt

endlich das erste Glied kleiner als das zweyte, so muß auch das dritte kleiner als das vierte seyn; denn wenn $a < ma$, so ist $m > 1$; also auch $b < mb$.

III. Zusatz: Sind die Vorderglieder gleich, so sind es auch die Hinterglieder; denn offenbar wenn $a = b$, so ist auch $ma = mb$; und wenn das erste Glied größer als das dritte ist, so muß das zweyte größer als das vierte seyn; denn wenn $a > b$, so ist $ma > mb$ (§. 44. N. 5.), ist endlich das erste kleiner als das dritte Glied, so ist auch das zweyte kleiner als das vierte, d. i. wenn $a < b$, so ist $ma < mb$.

IV. Zusatz: In der geometrischen discreten Proportion ist das Product der äußeren Glieder jenem der mittleren gleich; denn da jede discrete Proportion unter der Formel $a : ma = b : mb$, so ist offenbar $amb = mab$; z. B. wenn $2 : 4 = 6 : 12$, so ist $2 \times 12 = 4 \times 6 = 24$.

V. Zusatz: In der geometrischen stättigen Proportion ist das Product der äußeren Glieder der Quadratzahl des mittleren gleich; denn aus der Formel $a : ma : m^2 a$ folgt $m^2 a^2 = m^2 a^2$. Z. B. wenn $2 : 4 : 8$, so ist $2 \times 8 = 4^2 = 16$.

VI. Zusatz: Wenn das Product zweyer Zahlen dem Producte zweyer anderen gleich ist, so erhält man eine geometrische Proportion, wenn man die Factoren des einen Productes zu äußeren, die des andern zu mittleren Gliedern nimmt, d. i., wenn $ad = bc$, so ist $a : b = c : d$; oder auch $c : a = d : b$;

denn wenn $ad = bc$, so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; und $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

(§. 149.

(§. 149. IV. Zuſ.) mithin a : b = c : d, und c : a = d : b (§. 197. IX. Zuſ.). Z. B. da 4 × 9 = 2 × 18, ſo iſt 4 : 2 = 18 : 9, und 9 : 18 = 2 : 4, oder auch 2 : 9 = 4 : 18.

VII. Zuſatz: Wenn das Product zweyer Zahlen eine Quadratzahl giebt, ſo iſt die Wurzel der letztern die mittlere geometriſche Proportionalzahl zu den beyden erſtern, d. i., wenn ac = b², ſo iſt a : b : c: denn ac = b² = b . b, ſo folgt aus VI. Zuſ. offenbar a : b = b : c; oder a : b : c.

Z. B. da 4 × 9 = 36 = 6², ſo iſt 4 : 6 : 9.

VIII. Zuſatz: Wenn in einer geometriſchen Proportion die beyden erſten Glieder einerley Zeichen haben, ſo muß auch das dritte mit dem vierten Gliede einerley Zeichen haben. Z. B.

$$+2 : +4 = +3 : +6 = -3 : -6,$$

oder $-2 : -4 = +3 : +6 = +3 : +6$

Denn wenn die beyden erſten Glieder a, ma gleiche Zeichen haben, alſo beyde poſitiv, oder beyde negativ ſind, ſo bekömmt der Exponent m das Zeichen +. (§. 62. II. Zuſ.), ſo iſt in obigem Beyſpiele m = +2, da nur beyde Verhältniſſe einer Proportion den nemlichen Exponenten haben (§. 199 u. §. 197. V. Zuſ.), ſo bekömmt allemal das vierte Glied mb mit dem dritten b das nemliche Zeichen (§. 59). Sind hingegen die beyden erſtern Glieder einander entgegengeſetzt, ſo müſſen es auch die beyden letztern ſeyn, z. B. $+2 : -4 = +3 : -6 = -3 : +6$; denn in dieſem Falle bekömmt der gemeinſchaftliche Exponent m das

Glie-

Zeichen —, folglich erhalten b, und m b verſchiedene Zeichen (§. 60).

II. Zuſatz: Wenn die beyden Vorderglieder einerley Zeichen haben, ſo müſſen auch die beyden Hinterglieder gleiche Zeichen haben. Z. B.

$$+a : +b = +c : +d$$
$$+a : -b = +c : -d$$
$$-a : +b = -c : +d$$

Denn wenn die beyden Vorderglieder a, b gleiche Zeichen haben, ſo müſſen nothwendig, da beyde Verhältniſſe den nemlichen Exponenten m haben, die beyden Hinterglieder ma, mb unter ſich gleiche Zeichen haben. Sind hingegen die Zeichen der Vorderglieder verſchieden, ſo gilt dieſes ebenfalls von den Hintergliedern.

I. Anmerk. In der Folge werden unter Verhältniſſen und Proportionen allemal geometriſche verſtanden, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerket iſt.

II. Anmerk. Da aus den beyden letztern Zuſätzen ſich die Zeichen der Glieder, im Falle ſolches nothwendig iſt, leicht beſtimmen laſſen, ſo wird in der Folge keine Rückſicht mehr darauf genommen.

§. 211.

Aufgabe:

Zu drey Zahlen die vierte Proportionalzahl finden.

Auflöſung:

1. Da nicht nur die drey Zahlen, ſondern auch ihre Stellen, die ſie in der Proportion einnehmen, gegeben ſeyn müſſen, ſo ſchreibe man an den Platz des fehlenden Gliedes x.

2. Setze

2. Setze das Product der äußern Glieder jenem der mittlern gleich (§. 210. IV. Zuſ.), und beſtimme

3. aus dieſer Gleichung die unbekannte Größe x. (§. 151.).

I. Beyſpiel:

Zu den Zahlen in folgender Ordnung 2, 6, 5 die 4te Proportionalzahl finden, die alſo zugleich das vierte Glied ſeyn ſoll.

Auflöſung:

$$2 : 6 = 5 : x ; \; 2x = 6 \times 5 ; \; x = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

Zuſatz: Wenn die geſuchte Proportionalzahl das vierte Glied werden ſoll, ſo erhält man ſolche durch folgende Regel: Man nehme das Product der mittern Glieder, und dividire ſolches durch das erſte Glied.

II. Beyſpiel:

Wenn die Zahlen 2, 5, 6 in dieſer Ordnung ſo folgen, daß die geſuchte Proportionalzahl das dritte Glied werden muß.

Auflöſung:

$$2 : 5 = x : 6 ; \; 5x = 12 ; \; x = \frac{12}{5} = 2,4$$

§. 212.

Aufgabe:

Zu zwey gegebenen Zahlen die dritte Proportionalzahl ſuchen.

Auflöſung:

1. Man ſetze die Zahlen als Glieder einer ſtättigen Proportion ſo an, wie ihre Ordnung durch die Aufgabe beſtimmet iſt.

2. An die Stelle des fehlenden Gliedes schreibe man x.

3. Setze das Product der äußeren Glieder dem Quadrate des mittlern Gliedes gleich (§. 210. V. Zuſ.) und beſtimme

4. aus dieſer Gleichung die geſuchte Proportionalzahl x. (§. 151. und §. 156.)

1. Beyſpiel:

Zu den Zahlen 3, 6 in der nemlichen Ordnung die dritte Proportionalzahl ſuchen.

Auflöſung:

$3 : 6 : x$; $3x = 36$; $x = \frac{36}{3} = 12$.

2. Beyſpiel:

Zu den Zahlen 4, 16 die mittlere Proportionalzahl ſuchen.

Auflöſung:

$4 : x : 16$; $x^2 = 64$; $x = 8$.

§. 213.

Lehrſatz:

In jeder Proportion laſſen ſich

I. die mittleren und äußeren Glieder verwechſeln, d. i. wenn $a : b = c : d$, ſo iſt (viciſſim ſeu permutando) $a : c = b : d$, und $d : b = c : a$.

II. beyde Verhältniſſe umkehren, d. i. wenn $a : b = c : d$, ſo iſt (inverſo) $b : a = d : c$.

Beweis: Wenn $a : b = c : d$; ſo iſt $ad = bc$ und I. $a : c = b : d$, ferner $d : b = c : a$, II. $b : a = d : c$ (§. 210. IV. u. VI. Zuſ.)

§. 214.

§. 214.

Lehrſatz:

In jeder Proportion verhält ſich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu ſeinem Hintergliede, d. i.

wenn $a : b = c : d$, ſo iſt antecedentes et conſequentes ſummando, vel differentiando.

$$a \pm c : b \pm d = a : b = c : d.$$

Beweis:

Wenn $a : b = c : d$, ſo iſt

$a\,d = b\,c$ (§. 210. IV. Zuſ.);

$c\,d = c\,d$ mithin

$a\,d \pm c\,d = b\,c \pm c\,d$ (§. 30. Nr. 1.)

$(a \pm c)\,d = (b \pm d)\,c$ und

$a \pm c : b \pm d = c : d$ (§. 210. VI. Zuſ.)

$= a : b$ (§. 197. VI. Zuſ.)

I. Zuſatz: In jeder Proportion verhält ſich die Summe oder Differenz der beyden erſten Glieder zur Summe oder Differenz der beyden letzten Glieder, wie ein Paar homologe Glieder, d. i. wenn $a : b = c : d$, ſo iſt componendo vel dividendo $a \pm b : c \pm d = b : d$,

und convertendo $= a : c$

Denn wenn $a : b = c : d$, ſo iſt auch $a : c = b : d$ (§. 213.), woraus nach dem Lehrſatze beyde Proportionen folgen.

II. Zuſatz: Wenn mehrere Verhältniſſe einander gleich ſind, ſo verhält ſich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu ſeinem Hintergliede, d. i.

wenn

wenn a : b = c : d = e : f = g : h u. ſ. f., ſo iſt (a + c + e + g) : (b + d + f + h) = a : b = c : d u. ſ. f. Denn nach dem Lehrſatze, wenn a : b = c : d, folgt (a + c) : (b + d) = c : d = e : f, und aus dieſer Proportion wird ebenfalls (a + c + e) : (b + d + f) = e : f = g : h; aus letzterer endlich folgt: (a + c + e + g) : (b + d + f + h) = g : h = a : b u. ſ. f.

§. 215.

Aufgabe:

Eine gegebene Zahl B in drey Theile x, y, z theilen, die ſich gegen einander wie die gegebenen Zahlen a, b, c verhalten.

Auflöſung:

1. Man addire die gegebenen Verhältnißzahlen a, b, c, und
2. ſetze nachſtehende Proportionen an: die Summe dieſer Verhältnißzahlen verhält ſich zur gegebenen Zahl B, wie jede der Verhältnißzahlen zu dem ihr entſprechenden Theile, d. i.

   (a + b + c) : B = a : x = b : y = c : z

3. Aus dieſen drey Proportionen beſtimme man nach §. 211 die geſuchten Theile x, y, z.

Beweis:

1. Vermög der geſetzten Bedingung muß x + y + x = B ſeyn (§. 19. N. 2.).
2. Soll a : b = x : y, und b : c = y : z werden, mithin iſt a : x = b : y; b : y = c : z (§. 213. 1.);

folg-

folglich $(a+b+c) : (x+y+z) = a : x = b : y = c : z$ (§. 214. II. Zuſ.)

3. Statt $x+y+z$ die Zahl B Nro. 1. geſetzet, giebt $(a+b+c) : B = a : x = b : y = c : z$.

Beyſpiel:

Man ſoll 324 in drey ſolche Theile theilen, daß ſie ſich gegeneinander wie die Zahlen 4, 6, 8 verhalten.

Auflöſung:

$4+6+8=18$, mithin

$18 : 324 = 4 : x$; und $x = 72$

$= 6 : y$ " $y = 108$

$= 8 : z$ " $z = 144$

$x+y+z = 324 = B$.

I. Zuſatz: Auf ähnliche Art läßt ſich eine jede gegebene Zahl in eine beliebige Anzahl Theile theilen, deren Verhältnißzahlen beſtimmt ſind.

II. Zuſatz: Da in der Aufgabe für die 3 unbekannten Gröſſen drey verſchiedene Gleichungen gegeben ſind nemlich $x+y+z=B$; ferner $a : b = x : y$ mithin $ay = bx$; endlich $b : c = y : z$, alſo $bz = cy$, ſo laſſen ſich dieſe Gröſſen auch aus §. 154 beſtimmen.

§. 216.

Lehrſatz:

Wenn man in einer Proportion ein oder beyde Verhältniſſe, oder jedes Paar homologer Glieder mit der nemlichen Zahl multiplicirt, oder dividirt, ſo ſtehen die Producte und Quotienten noch in einer Proportion zueinander, d. i., wenn $a : b = c : d$, ſo iſt

I. ma

I. $ma : mb = nc : nd$

II. $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$

III. $ma : nb = mc : nd$

IV. $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$

Beweis:

1. Wenn m eine ganze Zahl ist, so folgen I. u. II. unmittelbar aus §. 198.

2. Ist m ein Bruch, so werden mit dessen Zähler die beyden Glieder des Verhältnisses multiplicirt, und mit dem Nenner dividirt, daher gilt I auch für einen Bruch.

3. Da man mit einem Bruche dividirt, wenn man solchen umkehrt, und multiplicirt, so gilt auch II, wenn m einen Bruch bezeichnet, welches ebenfalls erfolgt, im Falle auch n einen Bruch ausdrückt.

4. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch $a : c = b : d$ (§. 213.), woraus auf eben die Art folgt, daß

$ma : mc = nb : nd$, und $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} = \frac{b}{n} : \frac{d}{n}$

folglich auch III $ma : nb = mc : nd$;

IV $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$

5. Da sich Irrationalzahlen auf rationale durch Annäherung bringen lassen (§. 133. I. Zus.), so gelten diese Proportionen, m, n mögen Rational- oder Irrationalzahlen seyn.

§. 217.

§. 217.

Wenn 4 Zahlen proportionirt sind, so sind es auch ihre Potenzen und Wurzeln von einerley Grade, d. i.

wenn $a : b = c : d$; so ist

I $a^m : b^m = c^m : d^m$

II $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

Beweis:

Wenn $a : b = c : d$; so ist

$a \cdot d = bc$; also

$(ad)^m = (bc)^m$; $\sqrt[n]{(ad)} = \sqrt[n]{(bc)}$ (§. 95. N. 1.)

$a^m \cdot d^m = b^m \cdot c^m$; $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$ (§. 96. u. Zus.)

I $a^m : b^m = c^m : d^m$; II $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$ (§. 210. IV. Zus.).

§. 218.

Lehrsatz:

Wenn in zwey Proportionen zwey gemeinschaftliche Glieder vorkommen, so stehen die übrigen ebenfalls in einer Proportion

I wenn die beyden gemeinschaftlichen Glieder das erste oder zweyte Verhältniß ausmachen, d. i.

wenn $a : b = c : d$

und $a : b = e : f$ so ist ex aequo

simpliciter $c : d = e : f$

II wenn

II wenn die gemeinschaftlichen Glieder homolog sind, d. i. wenn a:b=c:d
und e:a=f:c, so ist ordinatim
et ex aequo e:b=f:d.

III wenn die gemeinschaftlichen Glieder die äußern oder mittlern Glieder sind, d. i.
wenn a:b=c:d
und b:e=f:c, so ist perturbate et ex aequo a:e=f:d.

Beweis von I.

Folget unmittelbar aus §. 197. VI. Zus.

Beweis von II.

Wenn a:b=c:d; so ist a:c=b:d
und e:a=f:c; e:f=a:c (§. 213. II)
folglich nach I. e:f=b:d, und e:b=f:d

Beweis von III.

Wenn a:b=c:d, so ist ad=bc
b:e=f:c; bc=ef (§. 216. VI. Zus.)
mithin ad=ef; folglich a:e=f:d (§. 210. VI. Zus.)

§. 219.

Lehrsatz:

Wenn man die Glieder zweyer Proportionen der Ordnung nach miteinander multiplicirt oder dividirt, so sind die Producte und die Quotienten in eben der Ordnung einander proportional; d. i.

wenn $a : b = c : d$

und $e : f = g : h$

so ist I $ae : bf = cg : dh$

II $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$

Beweis:

Wenn $a : b = c : d$; so ist $ad = bc$

$e : f = g : h$; $eh = fg$ (§. 210. IV. Zus.)

folglich I II

$ad \times eh = bc \times fg$; $\frac{ad}{eh} = \frac{bc}{fg}$ (§. 44. N. 1.)

oder $ae \times dh = bf \times cg$; $\frac{a}{e} \times \frac{d}{h} = \frac{b}{f} \times \frac{c}{g}$

und $ae : bf = cg : dh$; $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ (§. 210. VI. Zus.)

I. Zusatz: Wenn man die Glieder von drey oder mehrern Proportionen der Ordnung nach miteinander multiplicirt, so sind die Producte in eben der Ordnung einander proportionirt, d. i.

wenn $a : b = c : d$

$e : f = g : h$

$i : k = l : m$

so ist $aei : bfk = cgl : dhm$.

II. Zusatz: Wenn $a : b = m : n$

und $b : c = o : p$

so ist $ab : bc = mo : np$, oder auch $a : c = mo : np$ (§. 216.); man sagt daher, das Verhältniß $a : c$ sey aus den beyden Verhältnissen $m : n$ und $o : p$ zusammengesetzet.

III. Zu-

III. Zuſatz: Wenn $a : b = m : n$
$b : c = o : p$
$c : d = q : r$
$d : e = r : s$

ſo iſt $a : e = moqr : nprs$.

Man ſagt, das Verhältniß $a : e$ ſey aus vier Verhältniſſen zuſammengeſetzet. Ueberhaupt wenn mehrere Verhältniſſe ſo beſchaffen ſind, daß immer das Hinterglied in einem Verhältniße das Vorderglied im folgenden wird, ſo iſt das Verhältniß des erſten zum letzten Gliede aus allen dieſen Verhältniſſen zuſammengeſetzet.

IV. Zuſatz: Wenn in drey gleichen Verhältniſſen das Hinterglied des erſten Verhältniſſes das Vorderglied im zweyten, und das Hinterglied des zweyten Verhältniſſes das Vorderglied im dritten Verhältniſſe wird, d. i.

wenn $a : b = a : b$
$b : c = a : b$
$c : d = a : b$

ſo iſt I. $a : c = a^2 : b^2$; das erſte Glied zum dritten, wie die Quadrate der beyden erſten; man heißt ſo ein aus zwey gleichen Verhältniſſen zuſammengeſetztes ein duplicirtes (rationem duplicatam).

II. $a : b = \sqrt{a} : \sqrt{c}$, d. i., das erſte Glied zum zweyten, wie die Quadratwurzeln des erſten und dritten Gliedes, dieſes Verhältniß $a : b$ heißt in Anſehung des duplicirten $a : c$ ein ſubduplicirtes (ratio ſubduplicata).

Da III. $a : d = a^3 : b^3$; und IV. $a : b = \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{d}$ so ist das Verhältniß a : d ein triplicirtes (triplicata) von a : b; hingegen letzteres ein subtriplicirtes Verhältniß vom erstern (ratio subtriplicata).

IV. Abschnitt.

Von geometrischen Progressionen.

§ 220.

Lehrsatz: Jede geometrische Reihe ist unter nachstehender Formel enthalten:

$$a; ma; m^2a; m^3a; m^4a; \ldots\ldots$$

Beweis:

1. Offenbar kann a das erste Glied, und m den Exponenten jeder geometrischen Reihe, mithin a; ma die ersten zwey Glieder ausdrücken (§. 197. IV. Zus.).
2. Da ferner alle Verhältnisse den nemlichen Exponenten m haben, und jedes Glied in Rücksicht des folgenden ein Vorderglied ist (§. 201. b. u. Zus.), so giebt das Product des Zweyten Gliedes ma in den Exponenten m das dritte Glied $= m^2a$.
3. Auf ähnliche Art findet man das 4te Glied $= m^3a$, und so alle folgende; folglich gilt die aufgestellte Formel für jede geometrische Reihe.

I. Zusatz: Jedes Glied einer geometrischen Reihe ist ein Product aus dem ersten Gliede a in eine Potenz von m, dessen Exponent so viele Einheiten enthält, als Glieder vorangehen, folglich ist das allgemeine (§. 110.) oder nte Glied der Reihe $= m^{n-1}a$.

II. Zu-

II. Zusatz: Drückt n die Anzahl der Glieder einer geometrischen Reihe aus, so ist der allgemeine Ausdruck ein besonderer Ausdruck des letzten Gliedes, d. i. $u = m^{n-1}a$.

III. Zusatz: Der vollständige Ausdruck einer geometrischen Reihe ist:

$a, ma, m^2a, m^3a, m^4a, \ldots . m^{n-2}a, m^{n-1}a$

IV. Zusatz: Da $u = m^{n-1}a = \frac{m^n a}{m}$ (§. 104. III. Zus.), so ist $mu = m^n a$.

§. 221.

Lehrsatz:

In jeder geometrischen Reihe ist die Summe aller Glieder, oder $s = \frac{mu-a}{m-1} = \frac{m^n a-a}{m-1} = \frac{a-m^n a}{1-m}$.

Anmerkung. Dem Anfänger zur Uebung im algebraischen Calcul setze ich mehrere Beweisarten aus.

I. Beweis:

$s = a + ma + m^2a + m^3a + \ldots . + m^{n-2}a + m^{n-1}a$ (§. 220. III. Zus.)

und $ms = ma + m^2a + m^3a + \ldots . + m^{n-1}a + m^n a$

folglich $ms - s = m^n a - a$

$(m-1)s = m^n a - a$

$s = \frac{m^n a-a}{m-1} = \frac{mu-a}{m-1}$ (§. 220. IV. Zus.)

II. Beweis.

1. In jeder geometrischen Reihe sind alle Glieder, ausser dem letzten, Vorderglieder, mithin ist die Summe der Vorderglieder $s - u$.

2. und

2. und da außer dem ersten jedes Glied ein Hinterglied ist (§. 201. Zuſ.), ſo bezeichnet $s-a$ die Summe aller Hinterglieder.

3. Da ferner alle Verhältniſſe einander gleich ſind, ſo iſt nach §. 214. II. Zuſ.

$$s-u : s-a = a : ma = 1 : m$$

mithin $ms - mu = s - a$ (§. 210. IV. Zuſ.)

$$ms - s = mu - a$$

$$(m-1)s = mu - a$$

$$s = \frac{mu-a}{m-1}$$

III. Beweis:

1. Man dividire $m^n - 1$ durch $m - 1$ nach §. 109

$$\begin{array}{l|l} m^n - 1 & \\ (m-1) & \left\{ m^{n-1} + m^{n-2} + m^{n-3} + \ldots\ldots \right. \\ m^n - m^{n-1} & \\ - \quad + & \\ \hline m^{n-1} - 1 & \\ (m-1) & \\ m^{n-1} - m^{n-2} & \\ - \quad + & \\ \hline m^{n-2} - 1 & \\ (m-1) & \\ m^{n-2} - m^{n-3} & \\ - \quad + & \\ \hline m^{n-3} - 1 & \end{array}$$

2. Aus

2. Aus der bisher geführten Division erhellet, daß alle Glieder des Quotienten Potenzen von m sind, deren Exponent in jedem folgenden Gliede um 1 abnimmt, daß

3. Der Rest jedesmal aus dem letzten Gliede des Quotienten weniger 1 bestehe;

4. Stellet man sich die Division immer fortgesetzet vor, bis der Subtrahend im Exponenten $= n-3$, mithin das Glied des Quotienten selbst $= m^{n-(n-3)} = m^{n-n+3} = m^3$ wird, so ist

5. Der treffende Rest wieder $m^3 - 1$.

6. Man setze nun die Division wieder fort

$$\begin{array}{l} m^3-1 \\ (m-1) \end{array}\Big\{ \ldots\ldots + m^3 + m^2 + m + 1$$

m^3-m^2

$- \quad +$

m^2-1

$(m-1)$

m^2-m

$- \quad +$

$m-1$

$(m-1)$

$m-1$

$- \quad +$

0

7. Folg-

7. Folglich iſt:

$$\frac{m^n-1}{m-1} = m^{n-1}+m^{n-2}+\ldots+m^3+m^2+m+1$$

$$= 1+m+m^2+m^3+\ldots\ldots+m^{n-1}$$

$$\frac{m^n a-a}{m-1} = a+ma+m^2a+m^3a+\ldots+m^{n-1}a = s.$$

IV. Beweis:

Man dividire wieder 1 durch 1—m nach §. 109, ſo erhält man:

$$\frac{1}{1-m} = 1+m+m^2+m^3\ldots+m^{n-1}+\frac{m^n}{1-m}$$

(§. 91. II. Zuſ.) mithin wird

$$\frac{1}{1-m}-\frac{m^n}{1-m} = \frac{1-m^n}{1-m} = 1+m+m^2+m^3+\ldots m^{n-1}$$

$$\frac{a-m^n a}{1-m} = a+ma+m^2a+m^3a+\ldots+m^{n-1}a = s.$$

I. Zuſatz: Für eine zunehmende Reihe, wo $u > a$ iſt, nimmt man zur Beſtimmung der Summe die Formel $s = \frac{mu-a}{m-1}$; für die abnehmende hingegen die andere Formel $s = \frac{a-mu}{1-m}$; die aber im Grunde einerley ſind; denn in letzterer wird:

$$s-ms = a-mu$$

$$ms-a = mu-a \text{ (§. 149. II. Zuſ.)}$$

mithin $s = \frac{mu-a}{m-1} = \frac{a-mu}{1-m}$

II. Zu-

II. Zusatz: Aus den beyden Gleichungen: $s = \frac{mu-a}{m-a}$ und aus $u = m^{n-1}a$ (§. 220. II. Zus.) lassen sich von den 5 Stücken a, u, m, n, s, wenn drey davon gegeben sind, die übrigen zwey durch Rechnung finden (§. 153. u. §. 167.)

III. Zusatz: So wie in der arithmetischen Reihe, so sind auch in der geometrischen für 3 gegebene Dinge 20 verschiedene Aufgaben bestimmet (§. 208. II. Zus.)

§. 222.

Einige Aufgaben zur Uebung:

I. Aufgabe:

Aus dem letzten Gliede, dem Exponenten der Reihe, und der Summe das erste Glied, d. i., aus u, m, s, die Zahl a bestimmen.

Auflösung:

Da $s = \frac{mu-a}{m-1}$

so ist $ms - s = mu - a$,

und $a = mu + s - ms = s - m(s-u)$.

Beyspiel.

Das erste Glied einer geometrischen Reihe suchen, deren letztes Glied $= 64$, der Exponent $= 2$, und die Summe $= 127$ ist.

Auflösung:

$a = 127 - 2(127 - 64) = 127 - 2 \times 63$

$= 127 - 126 = 1$.

II. Aufl.

II. Aufgabe.

Aus dem ersten Gliede, dem Exponenten, der Summe, das letzte Glied, d. i. aus a, m, s die Zahl u suchen.

Auflösung:

$\frac{mu-a}{m-1} = s$; also $mu-a = (m-1)s$,

und $mu = (m-1)s+a$; $u = \frac{(m-1)s+a}{m}$

Beyspiel:

Man suchet das letzte Glied einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied $= 1$, der Exponent $= 3$, und die Summe $= 364$ ist.

Auflösung:

$u = \frac{(3-1)\times 364+1}{3} = 243.$

III. Aufgabe:

Aus dem ersten Gliede, dem Exponenten, der Anzahl der Glieder, die Summe einer geometrischen Reihe, d. i. aus a, m, n, die Größe s bestimmen.

Auflösung:

Diese ist unmittelbar durch die Formel:

$s = \frac{m^n a-a}{m-1}$ des Lehrsatzes gegeben.

Beyspiel:

Dem Erfinder des Schachspieles wurde zur Belohnung seine Bitte bewilliget, ihm nemlich folgende Summe Waizen zu reichen, für das erste Feld 1 Körnchen, für das zweyte 2, für das dritte 4, für das vierte 8, und so für das folgende Feld immer doppelt so

viel

viel Waizenkörner, als für das vorhergehende; wie groß ist die Anzahl aller geforderten Waizenkörner?

Auflösung:

In diesem Beyspiele ist a = 1, m = 2, n = 64, weil im Schachbrette 64 Felder sind, und man sucht s.

Folglich $s = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64}-1$.

Nun ist aber $2^2 = 4$

$2^4 = 16$

$2^8 = 256$

$2^{16} = 65536$

$2^{32} = 4,294'967,296$

$2^{64} = 18'''446.744''073,709'551,616$

Mithin $s = 18'''446,744''073,709'551,615$ Körner.

I. Anmerkung: Nimmt man nun an, daß ungefähr 2760 Körner vom mittlern Waizen nach baierischem Gewichte 4 Lothe, der Münchner Metzen aber 49 Pfund 15½ Loth, das Pfund zu 32 Loth gerechnet, wiegt, und das Münchner Schäffel 6 Metzen hält, so kommen auf das Schäffel vom mittlern Waizen 6'555,690 Körner, folglich beträgt die ganze bewilligte Summe 2''813,855'455,903 Münchner Schäffel. Würde man nun täglich eine Million, mithin jährlich 365 Millionen Schäffel entrichten, so würden doch mehr als 7709 Jahre zur völligen Abzahlung erfordert.

II. Anmerkung:

Die Aufgaben bey geometrischen Progressionen lassen sich fast allemal vermittels der Logarithmen viel leichter auflösen, und wenn die Anzahl der Glieder, d. i.

n gesucht wird, so sind die Logarithmen zur Auflösung schlechterdings unentbehrlich, wie die bisherigen Vorschriften nicht zureichen, eine Gleichung aufzulösen, wo die unbekannte Größe als Exponent einer Dignität oder Wurzel vorkömmt.

Zusatz: Wenn in einer geometrischen Progression von ächten Brüchen der Exponent der Verhältnisse m dem ersten Gliede a gleich, mithin $m = a$ ein ächter Bruch, und folglich die Reihe abnehmend ist, so wird

$$s = \frac{a - mu}{1 - m} = \frac{a - au}{1 - a} = \frac{a}{1 - a} \times (1 - u).$$

Dieser letzte Werth kömmt der Größe $\frac{a}{1-a}$ um so näher, je kleiner u wird, oder je weiter man so eine Reihe sich fortgesetzet denkt; stellet man sich daher die Reihe so verlängert, daß $u = 0$, d. i., die Reihe unendlich vor, so wird $s = \frac{a}{1-a}$

§. 223.

Aufgabe:

Die Summe nachstehender unendlichen Reihe finden, wenn $\frac{y}{x}$ ein ächter Bruch ist.

$$\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^5}{x^5} + \ldots\ldots$$

Auflösung:

Man nehme einen Bruch, dessen Zähler y, und der Nenner $= x - y$ ist, so enthält dieser Bruch die verlangte Summe, d. i. $s = \frac{y}{x-y}$

Be-

Beweis:

In dieſer gegebenen Reihe von Brüchen iſt $m = a = \frac{y}{x}$, ein ächter Bruch, ferner iſt die Reihe unendlich, mithin §. 222. Zuſ.

$$s = \frac{y}{x} : (1 - \frac{y}{x}) = \frac{y}{x} : \frac{x-y}{x} = \frac{y}{x} \times \frac{x}{x-y} = \frac{y}{x-y}$$

I. Zuſatz: Wenn man den Bruch $\frac{y}{x-y}$ durch Diviſion nach §. 109 auflöſet, ſo erhält man obige Reihe als Quotienten.

II. Zuſatz:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{2-1} = 1$ (§. 109. V. Zuſ.)

III. Zuſatz: $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$.

IV. Zuſatz: $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ldots = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$.

V. Zuſatz: $\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^6}{x^6} + \ldots = \frac{y^2}{x^2-y^2}$

§. 224.

Aufgabe:

Wenn $\frac{y}{x}$ wieder einen ächten Bruch bezeichnet, die Summe von nachſtehender unendlichen Reihe, wo die Zeichen wechſeln, finden.

$$\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3} - \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^5}{x^5} - \frac{y^6}{x^6} + \ldots$$

Auflösung:

Man nehme einen Bruch, dessen Zähler $= y$, und der Nenner $= x + y$, so giebt dieser die verlangte Summe, d. i.

$$s = \frac{y}{x+y}$$

Beweis:

1. Man theile die Reihe in zwey andere A, und B, von welchen B die negativen, und A alle positiven Glieder enthält, so ist

2. $B = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^6}{x^6} + \ldots\ldots = \frac{y^2}{x^2-y^2}$ (§. 223. V. 3.)

3. $A = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{y^5}{x^5} + \frac{y^7}{x^7} + \ldots$

$= \frac{y}{x}\left(1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^6}{x^6} + \ldots\ldots\right)$

$= \frac{y}{x}(1+B) = \frac{y}{x}\left(1 + \frac{y^2}{x^2-y^2}\right)$ (Nr. 2.)

$= \frac{y}{x} \times \frac{x^2-y^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{y}{x} \times \frac{x^2}{x^2-y^2} = \frac{xy}{x^2-y^2}$

4. Nun ist $s = A - B$; folglich

$$s = \frac{xy}{x^2-y^2} - \frac{y^2}{x^2-y^2} = \frac{xy-y^2}{x^2-y^2} = \frac{y(x-y)}{(x+y)(x-y)}$$

(§. 103. Zus.)

Also $s = \frac{y}{x+y}$

I. Zu-

I. Zusatz. Wenn man $\frac{y}{x+y}$ aus §. 109 wieder auflöset, so erhält man die gegebene Reihe wieder.

II. Zusatz: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ (§. 109. VI. Zus und §. 223. IV. Zus.).

III. Zusatz: $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243} - \ldots = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$

§. 225.

Lehrsatz:

Jede geometrische Reihe, wenn man alle Glieder durch das erste Glied dividirt, läßt sich in eine andere verwandeln, deren erstes Glied $= 1$ ist, und wo zwischen den Gliedern das vorige Verhältniß Statt hat.

Beweis:

Man dividire die allgemeine Formel geometrischer Reihen (§. 220. III. Zus.) durch das erste Glied a, so ist der Quotient:

$$1, m, m^2, m^3, \ldots\ldots, m^{n-1}$$

In dieser Reihe ist wieder m der gemeinschaftliche Exponent, und das erste Glied $= 1$.

Z. B. die Reihe 4, 8, 16, 32, 64 verwandelt sich in 1, 2, 4, 8, 16, welche letztere den nemlichen Exponenten 2 mit ersterer Reihe hat.

I. Zusatz: In jeder geometrischen Reihe, deren erstes Glied $= 1$ ist, sind alle Glieder Potenzen vom zweyten

ten Gliede; denn wenn man im allgemeinen Formulare geometrischer Reihen (§. 220. III. Zus.) $a = x$ setzet, so verwandelt sich solche in nachstehende:

$$1, m, m^2, m^3, m^4 \ldots\ldots m^{n-1}$$

wo das erste Glied $1 = m^0$ (§. 104. II. Zus.), mithin alle Glieder Potenzen vom zweyten Gliede sind.

II. Zusatz: Wenn N die allgemeine Formel geometrischer Reihen, deren erstes Glied $= 1$ ist; M eine solche Reihe bestimmter Zahlen; L hingegen eine arithmetische Reihe darstellet, die von 0 anfängt, und in den folgenden Gliedern die natürlichen Zahlen der Ordnung nach enthält, d. i.

M. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,

N. $1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, \ldots\ldots b^n$

L. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... n

so giebt jede Zahl der Reihe L die Anzahl der Verhältnisse an, aus welchen das Verhältniß von 1 zu der oder ihr stehenden Zahl in der Reihe M, oder N zusammengesetzet ist, so giebt die Zahl 5 in der Reihe L an, daß das Verhältniß $1 : 32$ aus 5 gleichen Verhältnissen, nemlich $1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 = 16 : 32$ zusammengesetzet sey, und eben so das Verhältniß $1 : b^6$ in der Reihe N (§. 349. III. Zus.); eben so bestimmet die Zahl 6 der Reihe L, daß $1 : 64$, und eben so $1 : b^6$ aus 6 gleichen Verhältnissen, jedes wie das erste $1 : 2$, oder $1 : b$, zusammengesetzet sey; überhaupt also bestimmen die Zahlen der Reihe L die Anzahl der Verhältnisse für die oder ihnen stehenden Zahlen der Reihe M und N

III. Zu-

III. Zusatz: Jedes Glied der Reihe L enthält den entsprechenden Exponenten, inwiefern die ober jedem Gliede stehende Zahl in der Reihe M und N Potenzen vom zweyten Gliede sind (I. Zus.); z. B. die Zahl 5 der Reihe L ist der Exponent vom 2ten Gliede der Reihe M, inwiefern die obenstehende Zahl $32 = 2^5$, also eine Potenz des zweyten Gliedes ist, für die Reihe N ists für sich einleuchtend.

IV. Zusatz: Nimmt man als Beyspiel für b eine andere als die Zahl 2, so kommen in der Reihe M ganz andere Zahlen als im II. Zusatze vor, so wenn man $b = 3$ setzet, so wird

M. 1, 3, 9, 27, 81, 243

L. 0, 1, 2, 3, 4, 5

Wo aber wieder die Zahlen der Reihe L sowohl die Anzahl der Verhältnisse angeben, wie die entsprechenden Exponenten sind für die Zahlen der Reihe M wie im II. und III. Zusatze.

V. Zusatz: Da man anstatt b jede Zahl (Nur die Zahl 1 ausgenommen, weil jede Potenz von 1 wieder $= 1$ ist) substituiren kann, so lassen sich unter eine Menge von Zahlen, alle nämlich, die als Glieder in der Reihe vorkommen, als Potenzen einer beliebigen Zahl, die man als zweytes Glied für b in der geometrischen Reihe N. II. Zus. setzet, betrachten, zu welchen allemal die Reihe L. die entsprechenden Exponenten angiebt.

VI. Hauptstück.

Von den Logarithmen.

I. Abschnitt.

Von Logarithmen überhaupt.

§. 226.

Erklärungen:

Wenn man jede Zahl m als eine Potenz von einer andern derselben Zahl b, die nicht 1 ist, betrachtet,

a) so heißt der Exponent der Potenz der Logarithmus der Zahl m, d. i. wenn $m = b^x$, so ist x der Logarithmus vom m;

b) den Logarithmus einer Zahl m bezeichnet man dadurch, daß man ihr log, oder auch nur l vorsetzet, d. i. wenn $m = b^x$; so ist $\log m = x$;

c) Die Zahl b heißt die Grundzahl, oder Basis, und

d) die Logarithmen, die einer jeden Zahl bey dem ein für allemal bestimmten Werthe der Basis b zukommen, machen ein logarithmisches System aus.

I. Zusatz: Da die Zahlen der Reihe L (aus. II. — V. Zus.) die Exponenten zu den ober ihnen stehenden Zahlen der Reihen M, N enthalten, so sind sie die Lo-

Logarithmen derſelben; da ſie zugleich die Anzahl der Verhältniſſe angeben, ſo bekam jede Zahl der Reihe L den Namen [illegible] (die Zahl der Verhältniſſe).

II. Zuſatz: Es kann unzählig viele logarithmiſche Syſteme geben; denn die Baſis b kann alle Werthe, 1 ausgenommen, erhalten (§. 225. V. Zuſ.).

III. Zuſatz: In jedem Syſteme iſt log. 1 = 0; denn allemal iſt $b^0 = 1$ (§. 104. II. Zuſ.).

VI. Zuſatz: In jedem Syſteme gehören zu gleichen Zahlen gleiche Logarithmen, d. i., wenn m = n, ſo iſt lm = ln. Denn $m = b^x$; $n = b^y$, alſo $b^x = b^y$, mithin x = y, d. i. lm = ln.

§. 227.

Lehrſatz:

Der Logarithmus eines Productes iſt der Summe der Logarithmen der Factoren gleich, das iſt:

log. m n = log. m + log. n

Beweis:

Für die Baſis b iſt (§. 226.)

$m = b^x$;	mithin	log. m = x
$n = b^y$;		log. n = y

$m n = b^{x+y}$ (§. 104.) folgl. log. mn = x + y
= log. m + log. n.

Zuſatz: Aus den Logarithmen der Primzahlen erhält man durch Addition die Logarithmen der zuſammengeſetzten Zahlen z. B. log. 3 + log. 5 = log. 15.

§. 228.

Lehrsatz:

Man erhält den Logarithmus eines Quotienten, wenn man vom Logarithmus des Dividends den Logarithmus des Divisors abzieht, d. i.:

$$\log. \frac{m}{n} = \log. m - \log. n.$$

Beweis:

$m = b^x$; mithin $\log. m = x$

$n = b^y$; $\log. n = y$

$\frac{m}{n} = b^{x-y}$ (§. 104. I. Zus.) folgl. $\log. \frac{m}{n} = x - y$

$= \log. m - \log. n.$

Zusatz: Man erhält den Logarithmus eines Bruches, wenn man vom Logarithmus des Zählers jenen des Nenners abzieht (§. 74.).

§. 229.

Lehrsatz:

Der Logarithmus von der Potenz einer Zahl ist ein Product aus dem Exponenten in den Logarithmus der Zahl, d. i.

$$\log. x^n = n \log. x$$

Beweis:

$x = b^r$; mithin $\log. x = r$

$x^n = b^{nr}$ (§. 105.), folglich $\log. x^n = nr$

$= n. \log. x.$

§. 230.

§. 230.

Lehrsatz:

Der Logarithmus einer Wurzel ist dem Quotienten gleich, wenn man den Logarithmus der Zahl durch den Exponenten der Wurzel dividirt, d. i.

$$\log. \sqrt[n]{x} = \frac{\log. x}{n}$$

Beweis:

$x = b^r$; mithin $\log. x = r$

$\sqrt[n]{x} = b^{\frac{r}{n}}$ (§. 105. I. Zus.); folglich $\log. \sqrt[n]{x} = \frac{r}{n}$

$= \frac{\log. x}{n}$

§. 231.

Lehrsatz:

Wenn C die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen A, B ist, so ist der Logarithmus von C die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den Logarithmen von A und B.

Beweis:

Wenn $A : C : B$; so ist $C = \sqrt{AB}$ (§. 210. V. Zus.), folglich $\log. C = \frac{\log. A + \log. B}{2}$ (§. 227. u. 230.), also ist $\log. C$ die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen $\log. A$ und $\log. B$ (§. 204. Zus.)

II. Abſchnitt.

Von briggiſchen Logarithmen.

§. 232.

Erklärungen:

a. Dasjenige logarithmiſche Syſtem, deſſen Baſis b = 10 geſetzet wird, oder wo $m = 10^x$ iſt, heißt das gemeine oder briggiſche Syſtem.

b. die Logarithmen ſelbſt von dieſem Syſteme heißen gemeine oder briggiſche, und

c. Da man jeden durch einen Decimalbruch, der gewöhnlich 7 Decimalſtellen enthält, ausdrückt, ſo nennet man die in demſelben vorkommende ganze Zahl die Characteriſtik oder das Kennziffer, die Decimalziffern hingegen die Mantiſſe.

I. Zuſatz: Wenn man §. 225. II. Zuſ. für b die Zahl 10 ſetzet, ſo verwandeln ſich obige Reihen in nachſtehende:

M.	1,	10,	100,	1000,	10000
N.	1,	10,	10^2,	10^3,	10^4
L.	0,	1,	2,	3,	4

Wo die letztere Reihe L die gemeinen oder briggiſchen Logarithmen für die Zahlen der Reihe M angiebt.

II. Zuſatz: Von allen Zahlen, die nicht als Glieder der Reihe M vorkommen, ſind die gemeinen Logarithmen Brüche, und zwar für die Zahlen zwiſchen 1 und 10 ächte, für die übrigen höheren Zahlen unächte Brüche.

III. Zu-

III. Zusatz: Für jede ganze Zahl ist die Characteristik um 1 kleiner, als die Anzahl der Ziffern, woraus die gegebene Zahl besteht, d. i. für eine ganze Zahl von n Ziffern ist die Characteristik des Logarithmus $= n - 1$. z. B. für eine ganze Zahl aus 6 Ziffern ist das Kennziffer $= 5$.

IV. Zusatz: Im briggischen Systeme gehöret zur größern Zahl ein größerer Logarithmus, das ist, wenn $m > n$, so ist $lm > ln$; denn die Reihe M sowohl als L sind zunehmende Reihen.

V. Zusatz: Man erhält den Logarithmus eines ächten Bruches, wenn man vom Logarithmus des Nenners den Logarithmus des Zählers subtrahiert, und dem Reste das Zeichen — giebt; d. i. $l\frac{3}{4} = -(l4 - l3) = -\log.\frac{4}{3}$. Denn $l\frac{3}{4} = l3 - l4$ (§. 228. Zus.) $= -l4 + l3$

$= -(\log. 4 - l3) = -l\frac{4}{3}$

VI. Zusatz: Zwey Brüche, wovon einer der umgekehrte vom andern ist, haben gleiche Logarithmen; aber mit verschiedenen Zeichen, d. i. $l\frac{m}{n} = -l\frac{n}{m}$.

VII. Zusatz: Ganze Zahlen und unächte Brüche haben positive, ächte Brüche aber negative Logarithmen: und umgekehrt zu positiven Logarithmen gehören ganze Zahlen, oder unächte Brüche; zu negativen Logarithmen hingegen ächte Brüche.

§. 233.

Aufgabe:

Den briggischen Logarithmus für die Zahl 5 bis auf 7 Decimalstellen zu finden.

Auf-

Auflösung:

1. Von der Reihe M. (§. 232. I. Zuf.) nehme man die nächst kleinere Zahl $1 = A$; die nächst größere $10 = B$, wo die gegebene Zahl 5 dazwischen liegt, und suche die mittlere geometrische Proportionalzahl C; d. i. $C = \sqrt{AB} = \sqrt{10} = 3{,}162277$.

2. Aus der Reihe L nehme man die Logarithmen $0 = lA$ und $1 = lB$, und bestimme den Logarithmus von C, d. i. $lC = \frac{1}{2}(lA + lB)$ (§. 231.) $= \frac{1}{2} = 0{,}5$ (§. 91.) mithin ist.

3. $l\,3{,}162277 = 0{,}5 = 0{,}5000000$ (§. 87. III. Zuf.)

4. Man suche aufs Neue für C und B, zwischen welchen die gegebene Zahl 5 liegt, die mittlere geometrische Proportionalzahl D, und zwischen ihren Logarithmen die mittlere arithmetische Proportionalzahl oder lD.

5. Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man auf die mittlere geometrische Proportionalzahl $Z = 5{,}000000$, und ihren Logarithmen $lZ = 0{,}6989700$ kömmt; nachstehende Tabelle enthält das ganze Verfahren, d. i. alle geometrische Proportionalzahlen und ihre entsprechende Logarithmen bis auf Z und lZ.

6. Da nun die zuletzt erhaltene Zahl nicht um 0,000001 von der gegebenen Zahl verschieden ist, so kann man $5 = Z$; und $l5 = lZ$, mithin $l5 = 0{,}6989700$ setzen, welches der gesuchte Logarithmus für die gegebene Zahl 5 ist.

Ta-

Tabelle

zur Berechnung des brigg. Logarithmus der Zahl 5.

A = 1,000000	lA = 0,0000000	
B = 10,000000	lB = 1,0000000	C = √AB
C = 3,162277	lC = 0,5000000	D = √BC
D = 5,623413	lD = 0,7500000	E = √CD
E = 4,216964	lE = 0,6250000	F = √DE
F = 4,869674	lF = 0,6875000	G = √DF
G = 5,232991	lG = 0,7187500	H = √FG
H = 5,048065	lH = 0,7031250	I = √FH
I = 4,958069	lI = 0,6953125	K = √HI
K = 5,002865	lK = 0,6992187	L = √IK
L = 4,980416	lL = 0,6972656	M = √KL
M = 4,991627	lM = 0,6982421	N = √KM
N = 4,997242	lN = 0,6987304	O = √KN
O = 5,000052	lO = 0,6989745	P = √NO
P = 4,998647	lP = 0,6988527	Q = √OP
Q = 4,999350	lQ = 0,6989135	R = √OQ
R = 4,999701	lR = 0,6989440	S = √OR
S = 4,999876	lS = 0,6989592	T = √OS
T = 4,999963	lT = 0,6989668	V = √OT
V = 5,000008	lV = 0,6989707	W = √TV
W = 4,999984	lW = 0,6989687	X = √VW
X = 4,999997	lX = 0,6989697	Y = √VX
Y = 5,000003	lY = 0,6989702	Z = √XY
Z = 5,000000	lZ = 0,6989700	

Zusatz: Durch die Logarithmen der Zahlen 10 und 5 ist der Logarithmus der Primzahl 2 gegeben; denn da $2 = \frac{10}{5}$, so ist $l\,2 = l\,10 - l\,5$ (§. 228.) d. i.

$$l\,10 = 1{,}0000000$$
$$l\,5 = 0{,}6989700$$
$$l\,2 = 0{,}3010300$$

§. 234.

Aufgabe:

Die Logarithmen für alle ganze Zahlen zu finden.

Auflösung:

1. Die Logarithmen für die Primzahlen bestimme man durch ein ähnliches Verfahren, wie §. 233.
2. für die zusammengesetzten Zahlen berechne man solche nach §. 227. Zus.; z. B. $l\,20 = l\,10 + l\,2 = 1{,}3010300$.

Zusatz: Im briggischen Systeme sind die Logarithmen aller Zahlen, die nicht als Glieder der Reihe M (§. 232. I. Zus.) vorkommen, durch Annäherung bestimmet.

Anmerkung:

Auf diesem mühsamen Wege wurden die gemeinen Logarithmen wirklich berechnet. Joh. Neper Baron von Merchiston, ein Schottländer, lieferte zuerst ein wirkliches Logarithmensystem, und gab solches zu Edinburg 1614 unter dem Titel heraus: Mirifici logarithmorum Canonis descriptio ejusque usus in utraque Trigonometria et omni Logistica mathematica

tion explicatio. Auf Nepers Gutheißen berechnete Heinrich Brigg, Professor der Geometrie zu Oxford für die Basis 10 die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 20000, und daher heißen die gemeinen auch die briggischen Logarithmen. Die Logarithmen für die Zahlen 20000 bis 90000 lieferte Adrian Vlacq, ein Holländer, für die Zahlen von 90000 bis 100000 hatte Brigg schon die Logarithmen ebenfalls gefunden.

Unter den neuern Ausgaben logarithmischer Tabellen sind die merkwürdigsten die Sherwinschen Tafeln London 1742, die neue Ausgabe derselben zu Avignon 1774, Joh. Karl Schulzens Sammlung, Berlin 1778; Tables portatives de Logarithmes par François Callet, à Paris chez Firmin Didot 1795. Die Logarithmen-Sammlungen von Vega, dessen logarithmisch-trigonometrisches Handbuch Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung 1800 vorzüglich dem Anfänger zu empfehlen ist.

III. Abschnitt.

Berechnung der Logarithmen durch Auflösung der Functionen in Reihen.

§. 235.

Lehrsatz:

In jedem logarithmischen Systeme ist für jeden Werth von x

$$\text{Log.}(1+x) = A\left(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 + \ldots\right)$$

Beweis:

1. Der Logarithmus von $(1+x)$ ist offenbar eine Function von x (§. 185), man setze daher wie §. 191.

2. $\log.(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots$ wo x in allen Gliedern vorkommen muß, weil für $x=0$; auch $\log.(1+x) = \log. 1 = 0$ ist (§. 226. III. Zus.).

3. Da nun x alle Werthe annehmen kann, so wird diese Reihe, wenn man anstatt x die Größe 2x substituirt:

$$\log.(1+2x) = A.2x + B.2^2x^2 + C.2^3x^3 + D.2^4x^4 + \ldots$$
$$= 2Ax + 4Bx^2 + 8Cx^3 + 16Dx^4 + \ldots$$

4. Nun ist $\log.(1+2x) - \log.(1+x) = \log.\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)$ (§. 228.) $= \log.\left(1 + \frac{x}{1+x}\right) = (2-1)Ax + (4-1)Bx^2 + (8-1)Cx^3 + (16-1)Dx^4 + \ldots$ Nr. 2 und 3.
$= Ax + 3Bx^2 + 7Cx^3 + 15Dx^4 + \ldots\ldots$

5. Setzet man für x Nr. 1. den Bruch $\frac{x}{1+x}$, so bekömmt man wie Nr. 2.

$$\log.\left(1 + \frac{x}{1+x}\right) = A\frac{x}{1+x} + B\frac{x^2}{(1+x)^2} + C\frac{x^3}{(1+x)^3} + D\frac{x^4}{(1+x)^4} + \ldots.$$

6. Wenn man entweder die Zähler durch ihre Nenner dividirt (§. 109.), oder diese Brüche nach §. 191. und VIII. Zus. daselbst in Reihen auflöset, so wird

$$A\frac{x}{1+x} = Ax - Ax^2 + Ax^3 - Ax^4 + \ldots.$$

$$B\frac{x^2}{(1+x)^2} = B\frac{x^2}{1+2x+x^2} = Bx^2 - 2Bx^3 + 3Bx^4 - \ldots.$$

$$C\frac{x^3}{(1+x)^3} = C\frac{x^3}{1+3x+3x^2+x^3} = Cx^3 - 3Cx^4 + \ldots.$$

$$D\frac{x^4}{(1+x)^4} = D\frac{x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4} = Dx^4 + \ldots$$

7. Folglich

$$\log.\left(1+\frac{x}{1+x}\right) = Ax - A\left.\begin{matrix} +B \end{matrix}\right\}x^2 + A\left.\begin{matrix} -2B \\ +C \end{matrix}\right\}x^3 - A\left.\begin{matrix} +3B \\ -3C \\ +D \end{matrix}\right\}x^4 + \ldots$$

8. Man setze die Reihen Nro. 4 und 7 einander gleich, und reducire diese neue Gleichung auf 0, so wird

$$0 = A\left.\begin{matrix} -A \\ +B \\ -3B \end{matrix}\right\}x + A\left.\begin{matrix} -2B \\ +C \\ -7C \end{matrix}\right\}x^2 + A\left.\begin{matrix} +3B \\ -3C \\ +D \\ -15D \end{matrix}\right\}x^3 + \ldots.$$

9. Nun sind alle Coefficienten aus §. 189. $= 0$, mithin $A - A = 0$, und $A = A$, wo also der erste Coefficient unbestimmt bleibt.

10. Eben so ist:

$-A + B - 3B = -A - 2B = 0$, und $-2B = A$;

also $B = -\frac{1}{2}A$.

11. $A - 2B + C - 7C = A - 2B - 6C = 0$.
$-6C = -A + 2B = -A + A$ (Nr. 10) $= -2A$; und $C = \frac{2}{6}A = \frac{1}{3}A$.

12. $-A + 3B - 3C - 14D = 0$; oder
$-A - \frac{3}{2}A - A - 14D = 0$
$-\frac{7}{2}A - 14D = 0 = -\frac{1}{2}A - 2D$; folglich
$D = -\frac{1}{4}A$.

13. Substituiret man diese Nr. 9 — 12 gefundenen Werthe der Coefficienten in der Reihe Nr. 2, so wird
$\log.(1+x) = Ax - \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{3}Ax^3 - \frac{1}{4}Ax^4 + \ldots$
$= A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots)$.

I. Zusatz: Setzet man für $1+x$ die Zahl $1-x$, das ist, giebt man x einen negativen Werth (wo aber x zugleich ein ächter Bruch seyn muß, damit $1-x$ noch eine positive Zahl bleibt, weil negative Zahlen als solche keine Logarithmen haben), so wird
$\log.(1-x) = -Ax - \frac{1}{2}Ax^2 - \frac{1}{3}Ax^3 - \frac{1}{4}Ax^4 - \ldots$
$= -A(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots)$.

II. Zusatz: $\log.\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log.(1+x) - \log.(1-x)$ (S. 228.), mithin
$\log.\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2Ax + \frac{2Ax^3}{3} + \frac{2Ax^5}{5} + \frac{2Ax^7}{7} + \ldots$
$= 2A(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \ldots)$.

III. Zusatz: Da x ein ächter Bruch seyn muß (I. Zus.) so setze man $x = \frac{1}{q}$, wo also q eine ganze Zahl ist,

so

so wird $\frac{1+x}{1-x} = (1+\frac{1}{q}) : (1-\frac{1}{q}) = \frac{q+1}{q} : \frac{q-1}{q} = \frac{q+1}{q-1}$, folglich:

$$\log.\left(\frac{q+1}{q-1}\right) = 2A\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{3q^3} + \frac{1}{5q^5} + \frac{1}{7q^7} + \ldots\right)$$

IV. Zusatz: $\log.\left(\frac{q+1}{q-1}\right) = \log.(q+1) - \log.(q-1)$; folglich:

$$\log.(q+1) = \log.(q-1) + 2A\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{3q^3} + \frac{1}{5q^5} + \frac{1}{7q^7} + \ldots\right)$$

V. Zusatz: Setzet man $\frac{1+x}{1-x} = \frac{p^2}{p^2-1}$ (II. Zus.); so ist $x = \frac{1}{2p^2-1}$, wo wieder p eine ganze positive Zahl bezeichnet, weil x ein ächter Bruch ist; und

$$\log.\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right) = 2A\left(\frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3(2p^2-1)^3} + \frac{1}{5(2p^2-1)^5} + \ldots\right)$$

VI. Zusatz: Da $\log.\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right) = \log.p^2 - \log.(p^2-1)$ $= 2\log.p - \log.((p+1).(p-1))$ (§. 220 und $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ §. 223. Zus.) $= 2\log.p - \log.(p+1) - \log.(p-1)$; so erhält man

$$\log.p = \tfrac{1}{2}\left[\log.(p+1) + \log.(p-1)\right] + A\left(\frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3(2p^2-1)^3} + \frac{1}{5(2p^2-1)^5} + \ldots\right)$$

§. 236.

§. 236.

Erklärungen:

a. der Coefficient A, mit welchem alle Glieder der Reihen §. 235 multiplicirt sind, heißt der logarithmische Modul;

b. Da es am natürlichsten ist, den Modul $A = 1$ zu setzen, so heißen jene Logarithmen, deren Modul $= 1$ ist, die natürlichen oder auch hyperbolischen; alle übrigen hingegen nennet man künstliche, wie z. B. die briggischen Logarithmen.

c. Um die Logarithmen verschiedener Systeme zu unterscheiden, setzet man den natürlichen log. nat., oder auch log. hyp.; den gemeinen hingegen log. vulg., oder auch log. ohne Beysatz vor; keine andere Systeme sind dermal üblich. Indessen will ich überhaupt die künstlichen Logarithmen durch log. art. bezeichnen.

Zusatz: Aus §. 235 sind daher

a. log. nat. $(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$ wo x jeden beliebigen Werth haben kann.

b. log. nat. $(1-x) = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \ldots)$ (§. 235. I. Zus.) wo aber, wie in folgender Formel x ein ächter Bruch seyn muß.

c. log. nat. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \ldots\right)$ (II. Zus.).

d. log. nat. $(q+1) =$ log. nat. $(q-1) + 2\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{3q^3} + \frac{1}{5q^5} \ldots\right)$ (IV. Zus.)

e.

e. log. nat. $p = \frac{1}{2}$ log. nat. $(p+x) + \frac{1}{2}$ log. nat. $(p-x)$

$$+ \frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3(2p^2-1)^3} + \frac{2}{5(2p^2-1)^5} + \ldots$$

(VI. Zuſ.)

II. Zuſatz: Jeden künſtlichen Logarithmus erhält man, wenn man deſſen Modul mit dem natürlichen Logarithmus multiplicirt; denn
log. art. $(1+x) = A$. log. nat. $(1+x)$ (I. Zuſ. a, und §. 235.).

III. Zuſatz: Zur Berechnung der natürlichen Logarithmen für alle ganze Zahlen ſind die Reihen d u. e im erſten Zuſatze die bequemſten, da ſie am meiſten convergiren, mithin durch wenige Glieder die Logarithmen ſchon auf mehrere Decimalen beſtimmet ſind.

§. 237.

Aufgabe:

Die natürlichen Logarithmen der Zahlen 2 und 3 zu finden.

I. Auflöſung: Vermittels der Reihe d (§. 236. I. Zuſ.)

1. Man ſetze in dieſer Reihe $q = 2$, ſo wird

$$\text{log. nat. } 3 = \text{log. nat. } 1 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} + \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} + \frac{1}{11.2^{11}} + \frac{1}{13.2^{13}} + \frac{1}{15.2^{15}} + \frac{1}{17.2^{17}} \ldots\ldots\right)$$

$$= 0$$

$$= 0 + 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{80} + \frac{1}{448} + \frac{1}{2304} + \frac{1}{11264} + \frac{1}{53248} + \frac{1}{245760} + \frac{1}{1114112} + \ldots\ldots$$

2. Verwandelt man diese Brüche in Decimalbrüche, so giebt ihre Summe den natürlichen Logarithmus der Zahl 3; d. i.

1,	0	0	0	0	0	0	0
0,	0	8	3	3	3	3	3
0,	0	1	2	5	0	0	0
0,	0	0	2	2	3	2	1
0,	0	0	0	4	3	4	0
0,	0	0	0	0	8	8	8
0,	0	0	0	0	1	8	8
0,	0	0	0	0	0	4	1
0,	0	0	0	0	0	0	9

log. nat. 3 = 1, 0 9 8 6 1 2 0, welcher Logarithmus bis auf 6 Decimalstellen richtig ist.

3. Nun setze man in der allgemeinen Formel (§. 236. I. Zus. d) $q = 3$, so wird

$$\text{log. nat. } 4 = \text{log. nat. } 2 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \ldots\ldots\right)$$

Nun ist log. nat. $4 = \text{log. nat. } 2^2 = 2$ log. nat. 2. (§. 229.) mithin:

$$2 \text{ log. nat. } 2 = \text{log. nat. } 2 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} \ldots\ldots\right.$$

folg-

folglich

$$\text{log. nat. } 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} + \frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \ldots\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147} + \frac{1}{1948617} + \ldots\right)$$

4. Verwandelt man wieder alle Glieder in Decimalbrüche, so giebt ihre Summe mit 2 multiplizirt den natürlichen Logarithmus von 2; das ist:

$$\begin{array}{r} 0,3333333 \\ 0,0123457 \\ 0,0008230 \\ 0,0000653 \\ 0,0000056 \\ 0,0000005 \\ \hline 0,3463734 \\ \times\ 2 \\ \hline \end{array}$$

log. nat. $2 = 0,6931468$ bis auf 5 Decimalstellen genau; will man solche genauer finden, so muß man von der Reihe mehrere Glieder, und von jedem Gliede mehrere Decimalstellen aussetzen.

II. Auflösung durch die allgemeine Formel des §. 236. I. Zus. c.

1. Man setze in solcher $p = 2$, so ist

$$\text{log. nat. } 2 = \tfrac{2}{3}\,\text{log. nat. } 3 + \tfrac{1}{3}\,\text{log. nat. } 1 + 2\left(\frac{1}{2\cdot 2^2 - 1} + \frac{1}{3(2\cdot 2^2-1)^3} + \ldots\right)$$

$$= \tfrac{2}{3}$$

$= \frac{1}{2}\log.\text{nat. } 3 + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \frac{1}{7\cdot 7^7} + \ldots\right)$

2. Kürze halber sey nun

$P = \frac{1}{7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \frac{1}{7\cdot 7^7} - \ldots\ldots$

so ist

3. $\log.\text{nat. } 2 = \frac{1}{2}\log.\text{nat. } 3 + P.$

4. Nun bestimme man wieder die allgemeine Formel n. 3 dadurch, daß man $p = 3$ setzet, das ist

$\log.\text{nat. } 3 = \frac{1}{2}\log.\text{nat. } 4 + \frac{1}{2}\log.\text{nat. } 2$

$+ \left(\frac{1}{2.3^2-1} + \frac{1}{3(2.3^2-1)^3} + \frac{1}{5(2.3^2-1)^5} + \ldots\right.$

5. Es ist aber $\log.\text{nat. } 4 = \log.\text{nat. } 2^2 = 2\log.\text{nat. } 2$, mithin $\frac{1}{2}\log.\text{nat. } 4 + \frac{1}{2}\log.\text{nat. } 2 = \frac{3}{2}\log.\text{nat. } 2$, folglich

6. $\log.\text{nat. } 3 = \frac{3}{2}\log.\text{nat. } 2 + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3\cdot 17^3}\right.$

$+ \frac{1}{5\cdot 17^5} + \ldots$

7. Man setze wieder

$Q = \frac{1}{17} + \frac{1}{3\cdot 17^3} + \frac{1}{5\cdot 17^5} + \ldots$ so wird

8. $\log.\text{nat. } 3 = \frac{3}{2}\log.\text{nat. } 2 + Q$

Man substituire nun diesen Werth in der Gleichung Nro. 3, so wird

9. $\log.\text{nat. } 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\log.\text{nat. } 2 + Q\right) + P$

$= \frac{3}{4}\log.\text{nat. } 2 + \frac{1}{2}Q + P$, und

$\frac{1}{4}\log.\text{nat. } 2 = P + \frac{1}{2}Q$, folglich

10. $\log.\text{nat. } 2 = 4P + 2Q.$

11. Substituirt man diesen Werth vom log. nat. 2 in der Gleichung Nro. 8, so wird

log.

log. nat. $3 = \frac{3}{2}(4P + 2Q) + Q$

$= 3(2P + Q) + Q = 6P + 4Q$

12. Nimmt man von der Reihe P Nr. 2. vier, und von Q Nr. 7 drey Glieder, verwandelt solche in Decimalbrüche, so ist

$\frac{1}{7} = 0{,}1428571$; $\frac{1}{17} = 0{,}0588235$

$\frac{1}{3 \cdot 7^3} = 0{,}0009718$; $\frac{1}{3 \cdot 17^3} = 0{,}0000678$

$\frac{1}{5 \cdot 7^5} = 0{,}0000119$; $\frac{1}{5 \cdot 17^5} = 0{,}0000001$

$\frac{1}{7 \cdot 7^7} = 0{,}0000002$; $Q = 0{,}0588914$

$P = 0{,}1438410$

13. Mithin

Nr. 10. log. nat. $2 = 4P + 2Q = 0{,}6931469$

Nr. 11. log. nat. $3 = 6P + 4Q = 1{,}0986116$

14. Genauer ist log. n. $2 = 0{,}6931478$

log. n. $3 = 1{,}0986123$

I. Zusatz: Auf ähnliche Art lassen sich die natürlichen Logarithmen aller übrigen Primzahlen berechnen, so ist z. B. log. nat. $5 = 1{,}6094379$. Je größer die Zahlen sind, desto mehr convergiren die Reihen, woraus ihre natürlichen Logarithmen bestimmt werden, desto leichter wird daher die Berechnung derselben.

II. Zusatz: Aus den natürlichen Logarithmen der Primzahlen lassen sich endlich leicht dieselben aus §. 227 Zus. für die zusammengesetzten Zahlen finden, so ist z. B. log. nat. $10 =$ log. nat. $5 +$ log. nat. $2 = 2{,}3025850$.

§. 238.

§. 238.

Aufgabe:

Für jeden gegebenen natürlichen Logarithmus x die entsprechende Zahl zu suchen.

Auflösung:

1. Da für die Zahl 1 der natürliche Logarithmus $= 0$ ist (§. 226. III. Zuf.), so muß für $x > 0$, die entsprechende Zahl größer als 1 seyn, man setze solche $= 1 + y$, das ist
2. $x = \log. nat. (1 + y)$, so ist für jeden Werth von y nach §. 236. I. Zuf. 2.
3. $x = y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 + \ldots\ldots$
4. Man setze nun:
   $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$ (§. 193.), so wird
   $y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2ACx^4 + \ldots$
   $y^3 = A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + \ldots\ldots$
   $y^4 = A^4x^4 + \ldots\ldots$
5. Substituirt man diese Werthe in die Gleichung Nr. 3, so wird
6. $$x = Ax + B - \tfrac{1}{2}A^2 \left\{ \begin{array}{l} x^2 + C - AB + \tfrac{1}{3}A^3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x^3 + D - \tfrac{1}{2}B^2 - AC + A^2B - \tfrac{1}{4}A^4 \end{array} \right\} x^4 + \ldots\ldots$$

   folglich

7. $$0 = \left\{ \begin{array}{l} A - 1 \end{array} \right\} x + \left\{ \begin{array}{l} B - \tfrac{1}{2}A^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + C - AB + \tfrac{1}{3}A^3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x^3 + D - \tfrac{1}{2}B^2 - AC + A^2B - \tfrac{1}{4}A^4 \end{array} \right\} x^4 + \ldots\ldots$$

8.

8. Nun sind wieder alle Coefficienten $= 0$ (§. 189.), mithin $A - 1 = 0$, also $A = 1$

9. $B - \frac{1}{2}A^2 = 0$; mithin $B = \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}$

10. $C - AB + \frac{1}{3}A^3 = 0$, oder
$C - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0$, folglich
$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{1.2.3}$

11. $D - \frac{1}{2}B^2 - AC + A^2B - \frac{1}{4}A^4 = 0$, oder
$D - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$, mithin
$D = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3+4+6}{24} - \frac{12}{24}$
$= \frac{1}{24} = \frac{1}{1.2.3.4}$

12. Setzet man statt der Coefficienten in der ersten Gleichung Nr. 4. diese Werthe, so wird
$y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$, folglich Nr. 2.

13. $x = \log.\,nat.\,(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots)$

I. Zusatz: Für $x = 1$ wird
$1 = \log.\,nat.\,(1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots)$
$= \log.\,nat.\,2{,}7182818$
das heißt: dem natürlichen Logarithmus 1 entspricht die Zahl 2,7182818, folglich ist letztere die Basis, oder Grundzahl der natürlichen Logarithmen (§. 226.).

II. Zusatz: Man bezeichnet gewöhnlich die Grundzahl der natürlichen Logarithmen mit e, so daß also $e = 2{,}7182818$ ist.

III. Zu-

III. Zusatz: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$

Denn log. nat. $e^x = x$ log. nat. e (§. 229.)

$= x$, da log. nat. $e = 1$.

ferner ist:

$x = \text{log. nat.}\left(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\right)$

(Nr. 13.), also

$\text{log. n. } e^x = \text{log. n.}\left(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\right)$

folglich: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$

IV. Zusatz: $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$

Denn man setze diese Reihe $= Q$; und die eben für e^x bestimmte, oder $e^x = P$, so ist, wenn man beyde Reihen miteinander multipliciret, $PQ = 1$;

ferner ist $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ (§. 104. III. Zus.),

also $e^x . e^{-x} = 1 = P . Q$; da endlich $e^x = P$ (III. Zus.), so ist auch $e^{-x} = Q$, das ist, der angenommenen Reihe gleich.

§. 239.

Aufgabe:

Den Modul A für das briggische Logarithmensystem, dessen Grundzahl $b = 10$ ist (§. 232.), zu finden.

Auflösung:

1. log. vulg. $10 = A$. log. nat. 10. (§. 236. II. Zus.)

$= A \times 2{,}3025850$ (§. 237. II. Zus.)

2.

2. Nun ist log. vulg. 10 = 1 (§. 232. I. Zus.), mithin ist

3. $A \times 2{,}3025850 = 1$, und

$$A = \frac{1}{2{,}3025850} = 0{,}4342945$$

§. 240.

Aufgabe:

Natürliche Logarithmen in gemeine zu verwandeln.

Auflösung:

Man multiplicire den natürlichen Logarithmus jeder Zahl mit 0,4342945.

Beweis log. vulg. m = log. nat. m × A (§. 236. II. Zus.)

z. B. log. vulg. 5 = 1,6094379 × 0,4342945 (§. 239 u. 237. I. Zus.)

= 0,6989700 (§. 233.)

Anmerkung: Zur Erleichterung dieser Reduction sind in den trigonometrischen Tafeln vom Schulze, am Ende der briggischen Logarithmen der natürlichen Zahlen Seite 188, die Producte der ersten 9 Zahlen mit A, oder 0,4342945 angeführt.

§. 241.

Aufgabe:

Gemeine Logarithmen in natürliche zu verwandeln.

Auflösung:

Man multiplicire den gemeinen Logarithmus jeder Zahl mit 2,3025850

Beweis:

log. nat. m × A = log. vulg. m (§. 236. II. Zuſ.)

mithin log. nat. m = log. vulg. m : A

$$= \text{log. vulg. m} : \frac{1}{2{,}3025850} \quad \text{(§. 239.)}$$

$$= \text{log. vulg. m} \times 2{,}3025850$$

z. B. log. nat. 2 = 0,3010300 × 2,3025850 (§. 233. Zuſ.)

= 0,6931472 (§. 237. Nr. 14.)

Anmerkung: In den logarithmiſchen Tafeln vom Schulze ſowohl als Vega ſind, am Ende der briggiſchen Logarithmen der natürlichen Zahlen, die Multipla von 2,3025850 zur Erleichterung der Verwandlung ausgeſetzet.

IV. Abſchnitt.

Vom Gebrauche der am Ende beygefügten kleinern logarithmiſchen Tabellen.

§. 242.

Aufgabe:

Aus den am Ende beygefügten kleinern Tabellen die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 — 1000 anzugeben.

Auflöſung:

Man ſchlage jede gegebene ganze Zahl in der Spalte N auf, ſo enthält der daneben ſtehende Decimalbruch in der Spalte L den entſprechenden Logarithmus; z. B. log. 324 = 2,5105450.

Anmerkung. In der Folge werden unter den Logarithmen immer nur die gemeinen oder briggiſchen verſtanden,

stehen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angezeiget ist.

§. 243.

Aufgabe:

Für eine ganze Zahl von einer beliebigen Anzahl Ziffern, wovon aber nur die ersten drey, links gezählet, Zahlziffern, die übrigen lauter Nullen sind, den Logarithmus zu finden. Z. B. für die Zahl 3860000.

Auflösung:

1. Man schlage den Logarithmus für die Zahl mit Hinweglassung der Nullen auf, und bestimme nach §. 242. ihren Logarithmus, d. i.

   log. 386 = 2,5865873

2. Vermehre das Kennziffer des gefundenen Logarithmus um so viel Einheiten, als die gegebene Zahl Nullen nach den Zahlziffern enthält, so ist dieser Logarithmus der gesuchte, das ist log. 3860000 = 6,5865873.

Beweis:

3860000 = 386 × 10000, mithin (§. 227.)

log. 3860000 = log. 386 + log. 10000
= 2,5865873 + 4
= 6,5865873.

I. Zusatz: Wenn man drey unmittelbar aufeinander folgende, oder nicht weit von einander abstehende große Zahlen mit ihren Logarithmen vergleichet, so findet man, daß sich die Unterschiede der Zahlen, wie jene der Logarithmen verhalten, d. i. wenn A,

R. C. der Ordnung nach auf einander folgende Zahlen bezeichnen, so ist

$$C - A : B - A = \log. C - \log. A : \log. B - \log. A.$$

II. Zusatz: Setzet man in dieser Proportion: $\log. B - \log. A = d$; so ist $\log. B = \log. A + d$.

III. Zusatz: Für $B - A = D$; wird $B = A + D$.

§. 244.

Aufgabe:

Für jede gegebene ganze Zahl, die aus mehr als 3 Ziffern besteht, aus den kleinern Tabellen den Logarithmus zu bestimmen, z. B. für 3685.

Auflösung:

1. Man bezeichne die gegebene Zahl durch B; so ist im Beyspiele $B = 3685$, und $l. B = l. 3685$.

2. Sondere die ersten drey Ziffern, links gezählt, ab, ergänze die übrigen mit Nullen, und bezeichne diese Zahl mit A, d. i. $A = 3680$.

3. Bestimme den Logarithmus von A aus den Tabellen (§. 243.), so ist $l A = l 3680 = 3,5658478$.

4. Vermehre das letzte Zahlziffer von A um 1, und bestimme wieder für diese Zahl C ihren Logarithmus aus den Tabellen, d. i.

$C = 3690$; $l C = l. 3690 = 3,5670264$.

5. Nun suche man durch die Proportion (§. 243. I. Zus.) $d = \log. B - \log. A$, addire solche dem Logarithmus von A, so giebt die Summe den verlangten Logarithmus von B; denn $\log. B = \log. A + d$; d. i.

C

C = 3690 B = 3685 lC = 3,5670264
A = 3680 A = 3680 lA = 3,5658478

C — A = 10 B — A = 5 lC — lA = 0,0011786

10 : 5 = 0,0011786 : lB — lA
2 : 1 = 0,0011786 : d; mith.n
d = 0,0011786 : 2 = 0,0005893,

folglich: lA = 3,5658478
d = 0,0005893

lB = lA + d = 3,5664371 = log. 3685

Anmerkung: Da die Proportion (§. 243. I. Zuſ.) für kleinere Zahlen als 10000 nicht ganz genau richtig iſt, ſo erhält man durch vorige Auflöſung aus kleinern Tabellen immer den Logarithmus in den letztern Decimalſtellen unrichtig.

§. 145.

Aufgabe:
Für einen gemeinen Bruch den Logarithmus zu finden.

Auflöſung:

1. Iſt der Bruch ein unächter, ſo ziehe man vom Logarithmus des Zählers jenen des Nenners ab (§. 228. Zuſ.).

2. Bey einem ächten Bruche ziehe man vom Logarithmus des Nenners jenen des Zählers ab, und ſetze dem Reſte das Zeichen — vor (§. 232. V. Zuſ.);

z. B. log. $\frac{3}{4}$ = — log. $\frac{4}{3}$; log. 4 = 0,6020600
log. 3 = 0,4771213

log $\frac{3}{4}$ = — 0,1249387

3.

3. Um bey einem ächten Bruche den Logarithmus positiv zu erhalten, so addire man der Characteristik vom Logarithmus des Zählers so viele Einheiten als nöthig sind, damit man den Logarithmus des Nenners abziehen kann, setze diese addirte Einheiten aber am Ende der Differenz mit dem Zeichen — wieder bey, d. i. für den Logarithmus von $\frac{3}{4}$

log. 3 = 0,4771213
+ 1 — 1
log. 4 = 0,6020600

log. $\frac{3}{4}$ = 0,8750613 — 1

Denn um was man durch Addition zur Kennziffer des Logarithmus vom Zähler den Logarithmus des Bruches vermehret hat, um eben so viel wird solcher durch Subtraction wieder vermindert, mithin dessen Werth nicht verändert.

§. 246.

Aufgabe:

Den Logarithmus eines Decimalbruches aus den Tafeln anzugeben; z. B. für den Bruch 0,436.

Auflösung:

1. Man bestimme den Logarithmus wie für eine ganze Zahl, d. i. l 436 = 2,6394865
2. Ziehe am Ende der Characteristik so viele Einheiten ab, als der gegebene Bruch Decimalstellen enthält, d. i. log. 0,436 = 2,6394865 — 3 = 0,6394865 — 1.

Be-

Beweis:

$0{,}436 = \frac{436}{1000}$; mithin

log. 0,436 = log. 436 — log. 1000

= 2,6394865 — 3

Man sieht leicht, daß dieser Beweis für jeden gegebenen Decimalbruch gelte.

§. 247.

Aufgabe:

Die einem gegebenen positiven Logarithmus entsprechende Zahlen aus den Tabellen anzugeben.

Auflösung:

1. Man schlage in der Spalte L die Mantisse des gegebenen Logarithmus auf, ohne auf das Kennziffer zu sehen,
2. ist solche vollkommmen in den Tabellen anzutreffen, so nehme man die daneben stehende Zahl in der Spalte N;
3. Enthält nun diese Zahl um ein Ziffer mehr als das Kennziffer des Logarithmus Einheiten hat, so ist sie die verlangte Zahl, enthält sie mehrere Ziffern, so schneidet man den Ueberschuß als Decimalstelle ab, bestünde sie aus wenigern Ziffern, so ergänzet man sie durch Nullen; so ist z. B. 2,6374897 = l 434; 0,6374897 = l 4,34; 4,6374897 = l 43400.
4. Wenn hingegen die Mantisse des gegebenen Logarithmus in den Tabellen nicht genau anzutreffen ist, wie z. B. von 3,6379898, so setze man den gegebenen Logarithmus 3,6379898 = l. B, und die gesuchte Zahl = B;

5. Nehme aus den Tabellen die nächst größere Mantisse, setze solcher das Kennziffer des gegebenen Logarithmus vor, bezeichne diesen Logarithmus durch l C, und bestimme die entsprechende Zahl C aus N. 2 u. 3. u. s. w. so ist im gegebenen Beyspiele:

l C = 3,6384893, und C = 4350.

6. Ferner setze man der nächst kleinern Mantisse der Tabelle das Kennziffer des gegebenen Logarithmus vor, bezeichne diesen neuern Logarithmus mit l A, und bestimme wieder aus Nro. 2 und 3 die Zahl A, so ist gegenwärtig: l A = 3,6374897; A = 4340.

7. Suche aus §. 243. I. und III. Zus. D = B — A, addire diese Differenz der Zahl A, so ist die Summe die entsprechende Zahl des gegebenen Logarithmus, denn B = A + D; d. i.

l C = 3,6384893 l B = 3,6379898 C = 4350
l A = 3,6374897 l A = 3,6374897 A = 4340

———————; ———————; ———

lC—lA=0,0009996 lB—lA=0,0005001 C—A=10

folglich

0,0009996 : 0,0005001 = 10 : B — A, oder

9996 : 5001 = 10 : D; und

$D = \frac{5001 \cdot 10}{9996} = 5$

folglich B = A + D = 4340 + 5 = 4345.

§. 248.

Aufgabe:

Die einem gegebenen negativen Logarithmus entsprechende Zahl zu suchen; z. B. für — 0,9542425.

Auf-

Auflösung:

1. Man suche nach §. 247. die dem gleichen positiven Logarithmus entsprechende Zahl, d. i.

$$0{,}9542425 = \log. 9.$$

2. Setze diese gefundene Zahl als Nenner unter 1 als Zähler, so ist dieser Bruch die gesuchte Zahl, d. i.

$$-0{,}9542425 = \log. \tfrac{1}{9}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} -0{,}9542425 &= 0{,}0000000 - 0{,}9542425 \\ &= \log. 1 - \log. 9 \\ &= \log. \tfrac{1}{9} \text{ (§. 228. Zus.)} \end{aligned}$$

§. 249.

Aufgabe:

Die decadische Ergänzung (§. 41.) eines Logarithmus anzugeben, z. B. vom log. 6.

Auflösung:

Man schlage in den Tabellen den Logarithmus der gegebenen Zahl auf, und ziehe alle Ziffer dieses Logarithmus von 9, das niedrigste aber von 10 ab, so ist der gefundene Rest die verlangte decadische Ergänzung vom Logarithmus der gegebenen Zahl, d. i.

$$\log. 6 = 0{,}7781513$$

$$\text{compl. dec. log. } 6 = 9{,}2218487. \text{ (§. 41. Anm.)}$$

V. Abschnitt.

Anwendung der Logarithmen auf die Rechnungen mit Ziffern.

§. 250.

Aufgabe:

Einen gegebenen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, z. B. $\frac{3}{4}$.

Auflösung:

1. Man addire dem Kennziffer vom Logarithmus des Zählers so viele Einheiten, bis man den Logarithmus des Nenners davon abziehen kann, und bemerke im Reste am Ende mit dem Zeichen — die addirten Einheiten; d. i.

$l3 = 0{,}4771212 : l4 = 0{,}6020600$

$\log. 3 = 1{,}4771212 - 1$

$\log. 4 = 0{,}6020600$

$\log. \frac{3}{4} = 0{,}8750612 - 1$ (§. 228. Zus.)

2. Nun bestimme man für den positiven Theil des Restes die entsprechende Zahl, und setze das Comma von der Rechten zur Linken nach so vielen Ziffern, oder im Falle die gefundene Zahl selbst schon ein Decimalbruch ist, rücke man das Comma um so viele Ziffern vorwärts, als der negative Theil der Differenz Einheiten enthält, d. i., da $0{,}8750612 = \log. 7{,}5$; so ist

0,8

0,8750612 — 1 = log. 0,75, folglich
$\frac{3}{4}$ = 0,75. (§. 91.)

Beweis:

Da log. $\frac{3}{4}$ = 0,8750612 — 1. Nro. 1.

= log. 7,5 — log. 10 = log. $\frac{7,5}{10}$ (§. 228.)

$\frac{3}{4}$ = 0,75

Man sieht leicht ein, daß der Beweis für jeden gegebenen gemeinen Bruch passe.

§. 251.

Aufgabe:

Gegebene Zahlen zu multipliciren, z. B. 345 × 24.

Auflösung:

Man addire die Logarithmen der Factoren, die der Summe entsprechende Zahl ist das verlangte Product, d. i.

l. 345 = 2,5378191
l. 24 = 1,3802112

l(345×24) = 3,9180303 (§. 227.)

Nun ist 3,9180303 = l 8280 aus den Tabellen, folglich 345 × 24 = 8280 (§. 226. IV. Zus.).

§. 252.

Aufgabe:

Gegebene Zahlen zu dividiren, z. B. 900 : 25

Auflösung:

Man ziehe vom Logarithmus des Dividends den Logarithmus des Divisors ab, bestimme für den Rest aus den Tabellen die entsprechende Zahl, so ist solche der verlangte Quotient, d. i.

$$\begin{aligned} \text{l. } 900 &= 2{,}9542425 \\ \text{l. } 25 &= 1{,}3979400 \\ \hline \text{l. } \frac{900}{25} &= 1{,}5563025 \text{ (§. 228.)} \end{aligned}$$

Nun ist 1,5563025 = log. 36 aus den Tabellen;

mithin $\frac{900}{25} = 36$.

§. 253.

Aufgabe:

Zu drey Zahlen die vierte geometrische Proportional-Zahl suchen, z. B. 24 : 36 = 48 : x.

I. Auflösung:

Man addire die Logarithmen der beyden mittlern Glieder, und ziehe von ihrer Summe den Logarithmus des ersten Gliedes ab, so ist die dem Reste entsprechende

dende Zahl die gesuchte vierte geometrische Proportionalzahl; d. i.

$$\begin{aligned} \text{l. } 36 &= 1{,}5563025 \\ \text{l. } 48 &= 1{,}6812412 \\ \hline \text{l}(36.48) &= 3{,}2375437 \\ \text{l } \ \ 24 &= 1{,}3802112 \\ \hline \text{l}\,\frac{36\times 48}{24} &= 1{,}8573325 \end{aligned}$$

Nun ist $1{,}8573325 = \log. 72$, mithin $\frac{36\times 48}{24} = 72$ (§. 211.) die verlangte 4te Proportionalzahl.

II. Auflösung:

Man addire die Logarithmen der beyden mittlern Glieder, und die decadische Ergänzung vom ersten Gliede, vom Kennziffer der Summe ziehe man 10 ab, so ist die dem Reste entsprechende Zahl die vierte geometrische Proportionalzahl; d. i.

$$\begin{aligned} \log. 36 &= 1{,}5563025 \\ \log. 48 &= 1{,}6812412 \\ \text{compl. dec. l. } 24 &= 8{,}6197888 - 10 \\ \hline & 11{,}8573325 - 10 \end{aligned}$$

folglich $1{,}8573325 = \log. 72$, und 72 ist die verlangte Proportionalzahl.

Beweis: Man bezeichne die Summe der beyden Logarithmen von 36 u. 48 mit A; den Logarithmus 24 mit N; so ist die Zahl 10 die höhere Einheit oder U, und 8,6197888 die decadische Ergänzung C von N.

Nun

Nun ist, nach der ersten Auflösung $lx = A - N$; ferner $A - N = A + C - U$ (§. 42.); folglich $lx = A + C - U$.

Anmerkung. Die decadische Ergänzung gewährt eine Abkürzung im Calcul, wenn man von der Summe mehrerer Logarithmen einen oder mehrere Logarithmen abziehen soll, und in diesen Fällen werde ich in der Folge immer davon Gebrauch machen.

§. 254.

Aufgabe:

Eine Zahl zu einer verlangten Dignität erheben. Z. B. $(24)^2$.

Auflösung:

Man multiplicire den Logarithmus der gegebenen Zahl mit dem Exponenten der verlangten Dignität, so ist die dem Producte entsprechende Zahl die verlangte Potenz für die gegebene Zahl; d. i.

$$l\,24 = 1{,}3802112$$
$$2 = \quad 2$$

$l\,(24)^2 = 2\,l\,24 = 2{,}7604224$ (§. 22.)

Nun ist aus den Tabellen: $2{,}7604224 = l.\,576$ folglich $(24)^2 = 576$.

§ 255.

Aufgabe:

Aus einer gegebenen Zahl eine verlangte Wurzel auszuziehen. Z. B. $\sqrt[6]{(729)}$.

Auf-

Auflösung:

Man dividire den Logarithmus der gegebenen Zahl mit dem Exponenten der verlangten Wurzel, die dem Quotienten zugehörige Zahl ist die gesuchte Wurzel, d. i. $l.729 = 2{,}8627275$

$6 = 6$

$$1\sqrt[6]{729} = \frac{l.729}{6} = 0{,}4771212 \text{ (§. 230.)}.$$

Nun ist $0{,}4771212 = l\,3$; mithin $\sqrt[6]{729} = 3$.

§. 256.

Aufgabe:

Eine Gleichung, wo die unbekannte Größe als Exponent der Potenz, oder der Wurzel vorkömmt, aufzulösen.

Auflösung:

1. Man reducire die gegebene Gleichung so, daß die Größe, welche die unbekannte Größe als Exponenten der Dignität oder Wurzel bey sich hat, allein und positiv auf einer Seite steht;

2. Nun setze man die Logarithmen der Größen für beyde Seiten, so sind auch diese gleich (§. 226. IV. Zus.)

3. Da nun in dieser neuen Gleichung die unbekannte Größe nicht mehr als Exponent, sondern als Factor eines Productes, oder als Nenner eines Bruches enthalten ist, so läßt sich ihr Werth nach den gewöhnlichen

lichen Reductionsgesetzen (§. 149. IV. V. Zus.) finden, d. i., die gegebene Gleichung auflösen.

I. Beyspiel: Die Gleichung $2^x = 8192$ aufzulösen.

Auflösung:

$$x \, l\, 2 = \log. 8192 \text{ (§. 229.)}$$

$$\text{also } x = \frac{\log. 8192}{\log. 2} = \frac{3.9133899}{0,3010300}$$

$$= 12,99\ldots \text{ beynahe} = 13; \text{ d. i. } 2^{13} = 8192.$$

II. Beyspiel: In einer geometrischen Reihe aus dem gegebenen ersten und letzten Gliede nebst dem Exponenten der Verhältnisse, die Anzahl der Glieder, oder aus a, u, m die Zahl n zu finden (§. 221. II. Zus.)

Auflösung:

Es ist $m^{n-x} a = u$ (§. 220. II. Zus.).

$$\text{also } m^{n-x} = \frac{u}{a}$$

$$\text{mithin } (n-x)\, l\, m = l\, u - l\, a$$

$$\text{und } n - x = \frac{l\, u - l\, a}{l\, m}$$

$$\text{folglich } n = \frac{l\, u - l\, a}{l\, m} + x = \frac{l\, u - l\, a + x\, l\, m}{l\, m}$$

III. Beyspiel: Die Gleichung $\sqrt[x]{729} = 9$ aufzulösen.

Auflösung:

Es ist $\frac{l\, 729}{x} = l\, 9$ (§. 230.)

$$\text{also } x \,.\, l.\, 9 = l\, 729$$

$$\text{und } x = \frac{l.\, 729}{l.\, 9} = \frac{2,8627275}{0,9542425} = 3$$

$$\text{Folglich } \sqrt[3]{729} = 9.$$

VII.

VII. Hauptstück.

Practische Rechenkunst.

I. Abschnitt.

Anwendung der vier Rechnungsarten.

§. 257.

Erklärungen:

a. Eine gezählte Größe (§. 1. d) bestimmter Art, oder eine ganze Zahl als Inbegriff mehrerer Einheiten bestimmter Art (§. 21.) genommen, heißt eine ganze benannte Zahl, z. B. 3 Gulden, 5 ℔ u. s. f.

b. Eben so ist ein Bruch dessen Ganzes als Größe bestimmter Art genommen wird, ein Bruch in benannten Zahlen, z. B. ¾ Thaler, ⅝ Ellen u. s. w.

c. Jene Zahl, welche angiebt, wie viel Einheiten einer bestimmten Art zusammen genommen eine Einheit der höhern Art ausmachen, heißt die Reductionszahl, so ist für Kr. und Fl. die Reductionszahl 60, weil 60 Kr. einen Fl. ausmachen.

Anmerkung. Die Reductionszahlen muß man sich, da sie an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten verschieden sind, aus der Landesverfassung

und

und aus vorhandenen Tabellen bekannt machen. Ich habe einige Tabellen, vorzüglich Baiern betreffend, am Ende als Beylagen angehängt, auf welche in der practischen Rechenkunst immer Rücksicht genommen werden muß.

I. Zusatz: Eine benannte Zahl wird auf eine andere niederer Art reducirt, wenn man erstere mit der Reductionszahl multiplicirt. Z. B. 12 Fl. = 12 × 60 Kr.

Denn 1 Fl. = 60 Kr.

12 = 12

Folglich 12 Fl. = 12 × 60 Kr.

II. Zusatz: Eine benannte Zahl wird auf den Ausdruck einer Zahl höherer Art gebracht, wenn man sie durch die Reductionszahl dividirt. Z. B.

24 Kr. = $\frac{24}{60}$ Fl. = $\frac{2}{5}$ Fl.

Denn 60 Kr. = 1 Fl.

und 1 Kr. = $\frac{1}{60}$ Fl., mithin

24 Kr. = $\frac{24}{60}$ Fl. = $\frac{2}{5}$ Fl.

§. 258.

Aufgabe:

Benannte ganze Zahlen zu addiren.

Auflösung:

1. Man setze die gleichartigen Größen untereinander, und addire solche nach §. 31.

2. Bekömmt man von einer Art so viele Einheiten, daß sie eine oder mehrere Einheiten der nächst höhern Art ausmachen, so zähle man sie letztern bey.

Bey-

Beyspiel:

5 Fl.	24 Kr.	3 Pf.	1 Hl.
6 Fl.	48 Kr.	2 Pf.	1 Hl.
Summe 12 Fl.	13 Kr.	2 Pf.	— Hl.

§. 259.

Aufgabe:

Ganze benannte Zahlen zu subtrahiren.

Auflösung:

1. Man schreibe die Zahlen des Subtrahends so unter jene des Minuends, daß gleichartige Größen unter einander zu stehen kommen, und ziehe sie nach der Vorschrift von §. 32. voneinander ab.

2. Ist an irgend einer Stelle der Minuend kleiner als der Subtrahend, so borge man im erstern eine Einheit von der nächst höhern Art, und addire sie an dieser Stelle, wo sie aber so viel gilt, als die Reductionszahl anzeiget.

Beyspiel:

24 Jahre.	2 Monathe.	6 Tage	7 St.
15 J.	9 M.	27 T.	23 St.
Rest 9 J.	4 M.	8 T.	8 St.

§. 260.

Aufgabe:

Benannte ganze Zahlen zu multipliciren.

Auf-

Auflösung.

1. Da der Multiplicator allemal eine bloße Zahl ist (§. 43.), so multiplicire man damit alle Zahlen des Multiplicands bey jenen der niedrigsten Art angefangen nach §. 53 u. 54.

2. Bekömmt man in einem der Producte so viele Einheiten, daß sie zusammen eine oder mehrere Einheiten der nächst höhern Art ausmachen, so zähle man solche letztern bey.

Beyspiel:

5 Cent. 82 lb. 15 Loth.
× 6

30 C. 492 lb. 90 L.
= 34 C. 94 lb. 26 L.

§. 261.

Aufgabe:

Eine Größe in benannten Zahlen durch eine ganze Zahl zu dividiren.

Auflösung.

1. Man setze den Divisor unter die Zahl des Dividends von der höchsten Art, und dividire wie §. 55. und 56.

2. Den bleibenden Rest reducire man aus §. 257. I. Zus. auf Einheiten der nächst niedern Art, addire sie solchen, und dividire die Summe mit der gegebenen Zahl.

3. Auf die nemliche Art verfahre man an allen folgenden Stellen.

Beyspiel:

24 Cent. 36 ℔. 3 Loth soll durch 5 getheilet werden.

Cent.	℔.	Loth.
24 (5) 4	436 (5) 87	35 (5) 7
20	40	35
4 = 400 ℔	36	
	(5)	
	35	
	1 = 32 Loth.	

Folglich ist (24 C. + 36 ℔. + 3 L.) : 5 = 4 C. + 87 ℔. + 7 L.

§. 262.

Aufgabe:

Brüche in benannten Zahlen zu addiren, oder zu subtrahiren.

Auflösung:

1. Beziehen sich die Brüche auf Größen von einerley Art, so behandle man sie nach §. 82. und 83. wie Brüche von Zahlen überhaupt.

2. Sind sie nicht durch Größen von einerley Art ausgedrücket, so reducire man sie auf solche nach §. 257. I. u. II. Zus., und verfahre wie vorhin.

I. Beyspiel.

a. $\frac{3}{4}$ Fl. + $\frac{2}{5}$ Fl. = $\frac{15}{20}$ Fl. + $\frac{8}{20}$ Fl. = $\frac{23}{20}$ Fl.

b. $\frac{3}{4}$ Fl. − $\frac{2}{5}$ Fl. = $\frac{15}{20}$ Fl. − $\frac{8}{20}$ Fl. = $\frac{7}{20}$ Fl.

II. Beyspiel:

a. $\frac{3}{4}$ Cent. + $\frac{2}{3}$ lb. = $\frac{300}{4}$ lb. + $\frac{2}{3}$ lb. = $\frac{908}{12}$ lb.

b. $\frac{3}{4}$ Cent. − $\frac{2}{3}$ lb. = $\frac{300}{4}$ lb. − $\frac{2}{3}$ lb. = $\frac{892}{12}$ lb.

§. 263.

Aufgabe:

Einen gegebenen Bruch in benannten Zahlen mit einer ganzen Zahl, oder einem Bruche

I. zu multipliciren, oder

II. zu dividiren.

Auflösung:

Im ersten Falle verfahre man nach §. 84, im zweyten nach §. 85.

I. Beyspiel.

a. $\frac{3}{4}$ Fl. × $\frac{2}{5}$ = $\frac{6}{20}$ Fl.

b. $\frac{3}{4}$ Fl. × 2 = $\frac{6}{4}$ Fl. = $\frac{3}{2}$ Fl.

II. Beyspiel.

a. $\frac{3}{4}$ Fl. : $\frac{2}{5}$ = $\frac{15}{8}$ Fl.

b. $\frac{3}{5}$ Fl. : 2 = $\frac{3}{5}$ Fl. = $\frac{6}{10}$ Fl.

II. Abschnitt.

Anwendung der Proportionslehre.

§. 264.

Erklärungen:

a. Zwey Größen A, B stehen zu einander im geraden Verhältnisse, wenn mit der Zunahme der einen die Zunahme der andern, und mit der Abnahme von A die Abnahme von B. verknüpft ist.

b. Wird hingegen durch die Zunahme der ersten Größe A die Abnahme der zweyten Größe B, und durch die Abnahme von A die Zunahme von B bestimmet, so stehen die Größen A, B zueinander im umgekehrten Verhältnisse.

§. 265.

Lehrsatz:

Wenn m, n jede mögliche ganze Zahl ausdrücken, und wenn zwey Größen A, B so in einem geraden Verhältnisse stehen, daß den Theilen a, ma der einen Größe A, allemal der Ordnung nach die Theile b, mb der andern Größe B entsprechen, so giebt der Theil $\frac{n}{m}$ a von A, allemal den Theil $\frac{n}{m}$ b von B.

Z. B.

Wenn 100 Fl. Capital 5 Fl. Interesse, und m 100 Fl. Cap. m 5 Fl. Interesse geben, so geben $\frac{n}{m}$ 100 Fl. Cap. auch $\frac{n}{m}$ 5 Fl. Inter.

Beweis:

1. Man setze $\frac{1}{m}$ a, gebe von B den Theil d, so giebt m. $\frac{1}{m}$ a den Theil md (per Hyp.); das ist, a giebt md

2. Da nun a den Theil b giebt (per Hyp.), so ist b $=$ md, und d $=$ $\frac{1}{m}$ b, und $\frac{1}{m}$ a giebt $\frac{1}{m}$ b Nr. 1., folglich

3. entspricht n $\frac{1}{m}$ a der Theil n $\frac{1}{m}$ b (per Hyp.), d. i. $\frac{n}{m}$ a giebt $\frac{n}{m}$ b.

§. 266.

Lehrsatz:

Wenn wieder m, n jede noch noch so große ganze Zahl bezeichnen, und die Größen A, B im umgekehrten Verhältnisse so zu einander stehen, daß den Theilen a, ma der einen Größe A, von der andern B die Theile b, $\frac{1}{m}$ b der Ordnung nach entsprechen, so giebt der Theil $\frac{n}{m}$ a von A, den Theil $\frac{m}{n}$ b der Größe B.

Z. B. Wenn 100 Menschen einen Vorrath von Lebens-

bensmitteln in 8 Monathen, und m. 100 Menſchen ſolchen in $\frac{1}{m}$ 8 Mon. aufzehren, ſo werden $\frac{n}{m}$ 100 Menſchen ſelben in $\frac{m}{n}$ 8 Monathen verzehren.

Beweis:

1. Man ſetze: $\frac{1}{m}$ a gebe den Theil d, ſo giebt m. $\frac{1}{m}$ a den Theil $\frac{1}{m}$ d (per hyp.), d. i. a giebt $\frac{1}{m}$ d.

2. Da nun a der Theil b entſpricht (per hyp.), ſo iſt $b = \frac{1}{m} d$, und $mb = d$, folglich giebt $\frac{1}{m}$ a den Theil mb, und

3. n $\frac{1}{m}$ a giebt $\frac{1}{n}$ mb (per hyp.), das iſt $\frac{n}{m}$ a von A entſpricht von der Grösse B der Theil $\frac{m}{n}$ b.

§. 267.

Lehrſatz:

Wenn m, n jede beliebige ganze Zahl bezeichnen, und die Grösen A, B ſo im geraden Verhältniſſe ſtehen, daß den Theilen a, ma der erſten Grösse A, allemal der Ordnung nach die Theile b, mb der zweyten Grösse B entſprechen, ſo ſind jede zwey beliebige Theile a, α der erſten Grösse A, den correſpondirenden Theilen b, β der andern B proportionirt, d. i.

$$a : \alpha = b : \beta.$$

Beweis:

1. Das Verhältniß $a : \alpha$ läßt sich allemal auf ein Verhältniß ganzer Zahlen $m : n$ reduciren (§. 198. IV. Zus.), mithin ist

2. $a : \alpha = m : n = 1 : \frac{n}{m}$ (§. 198.)

$$\alpha = \frac{n}{m} a.$$

3. Nun giebt a den Theil b, und ma den Theil mb (per hyp.); mithin entspricht $\frac{n}{m}$ a der Theil $\frac{n}{m}$ b (§. 265.), das ist

4. der Theil α giebt $\frac{n}{m}$ b, es giebt aber auch α den Theil β (per hyp.); mithin ist $\beta = \frac{n}{m}$ b.

5. Ferner ist $a : \frac{n}{m} a = b : \frac{n}{m} b$ (§. 210.), folglich aus Nro. 1. u. 4. $a : \alpha = b : \beta$.

§. 268.

Lehrsatz:

Wenn m, n jede beliebige ganze Zahl ausdrücken, und zwey Größen A, B im umgekehrten Verhältnisse so zu einander stehen, daß den Theilen a, ma von A, die Theile b, $\frac{1}{m}$ b von B der Ordnung nach entsprechen, so sind jede zwei beliebige Theile a, α von A den beiden correspondirenden Theilen b, β von B umgekehrt proportionirt, d. i.

$$a : \alpha = \beta : b.$$

Be-

Beweis:

1. Es ist allemal $a : \alpha = m : n = 1 : \frac{n}{m}$ (§. 198. IV. Zus.) also $\alpha = \frac{n}{m} a$.

2. Da nun dem Theile a der Theil b, und dem Theile ma der Theil $\frac{1}{m}$ b (per hyp.), also dem Theile $\frac{n}{m}$ a der Theil $\frac{m}{n}$ b entspricht (§. 266.), so giebt

3. der Theil α den Theil $\frac{m}{n}$ b; der Theil α giebt aber auch β (per hyp.); also ist $\beta = \frac{m}{n}$ b.

4. Ferner ist $a : \frac{n}{m} a = b : \frac{n}{m} b = \frac{m}{n} b : b$ (§. 197. VII. Zus. und §. 198.),

5. folglich aus Nr. 1. und 3. substituirt, wird

$$a : \alpha = \beta : b.$$

I. Zusatz: Die beyden letztern Lehrsätze enthalten die Angabe der Merkmale, ob die Theile einer Größe A den correspondirenden Theilen einer andern Größe B proportionirt sind, oder nicht, und im ersten Falle, ob sie solchen gerade oder umgekehrt proportionirt sind, das ist, wie man sich der Kürze wegen ausdrücket, ob und in welchem Verhältnisse die Größen zu einander stehen.

II. Zusatz: Im geraden Verhältnisse stehen

a. die Menge der Waaren und ihre Preise;

b. die Zinsen mit der Größe des Capitals, und Länge der Zeit, während welcher das Capital aufgelegt ist;

c. die Anzahl der Arbeiter mit ihrer Verrichtung, und dem Lohne dafür;

d. die Größe der Verrichtung mit der dazu erforderlichen Zeit;

e. Verschiedene Gewichte, Längen = Getraid = Wein= Maaße, verschiedene Geldsorten zueinander.

II. Zusatz: Im umgekehrten Verhältnisse stehen

a. Bey einerley Arbeit die Anzahl der Arbeiter, und die dazu erforderliche Zeit;

b. Die Länge und Breite des zu einem Kleide erforderlichen Tuches;

c. Die Anzahl der Menschen mit der Zeit, in welcher sie einen gewissen Vorrath an Lebensmitteln aufzehren.

§. 269.

Aufgabe:

Zu drey gegebenen benannten Zahlen die vierte Proportionalzahl suchen.

Auflösung:

1. Man untersuche aus §. 267 und 268, in welchem Verhältnisse die zwey Größen stehen, und bestimme daraus die Ordnung der Glieder.

2.

2. Nun reducire man die Glieder des gegebenen Verhältnisses aus §. 257. auf Zahlen einerley Art;

3. Behandle sie wie bloße Zahlen (§. 197. VII. Zus. und §. 199. II. Zus.);

4. Versetze die Glieder nach §. 213, oder verkleinere solche aus §. 216, je nachdem es die speciellen Umstände der Aufgabe erfodern.

5. Bestimme endlich aus §. 211 oder 212 die gesuchte vierte Proportionalzahl.

I. Beyspiel: Wie viel Fl. kosten 7 Loth Gewürz, wenn $\frac{1}{2}$ ℔ Gewürz 5 Fl. kostet?

Auflösung:

$\frac{1}{2}$ ℔ Gew. : 7 Loth Gew. = 5 Fl. : x Fl.

16 Lth. Gew. : 7 Loth Gew. = 5 Fl. : x

$16 : 7 = 5 : x;\quad x = \frac{35}{16}$ Fl.

II. Beyspiel: Wie viele Tage brauchen 7 Arbeiter zu einem Graben, wenn 5 Arbeiter solchen in 18 Tagen vollenden?

Auflösung:

5 Arb. ; 7 Arb. = x Tage: 18 Tag.

und $7 : 5 = 18 : x$, mithin

$$x = \frac{18 \cdot 5}{7} = 12\ \tfrac{6}{7}\ \text{Tage.}$$

Zusatz: wenn man Nr. 4 die Glieder so ordnet, daß die gesuchte Zahl an die vierte Stelle zu stehen kömmt, so giebt der Zusatz §. 211. I. Beysp. die Regel an, nach welcher zu den drey gegebenen Zahlen die vierte Pro-

por-

portionalzahl gefunden werden kann; es heißt daher diese Regel die Regel Detri (regula de tribus terminis, regula aurea ihrer Brauchbarkeit wegen).

Anmerkung: Man unterscheidet die ordentliche Regel Detri, und die verkehrte Regel Detri, je nachdem die zwey Größen im geraden oder verkehrten Verhältnisse stehen; dieser Unterschied bezieht sich also nur auf die Ordnung der Glieder, nicht auf die Regel selbst.

§. 270.

Aufgaben zur Uebung und Erläuterung der am Ende beygefügten Tabellen.

I. Aufgabe:

Wie viel betragen 10 ℔ baierischen Handelsgewichtes nach dem neuesten französischen Gewichte Grammes?

Auflösung:

1. Da vermöge der Tabelle baierisch. ℔ = 11682 Aß. holl. Tr. Gew., und franz. Gramme = 20,8128 holl. Aß., so ist

   baier. ℔ : franz. Gramme = 11682 : 20,8128, und

   20,8128 b. ℔ = 11682 fr. Grammes.

2. Vermöge §. 267 wird daher

   20,8128 baier. ℔ : 10 baier. ℔ = 11682 Gram. : x Grammes.

   folglich $x = \frac{10 \times 11682}{20{,}8128} = 5612{,}9$

3. Bequemer läßt sich x durch Logarithmen, die in der Tabelle ebenfalls angezeigt sind, finden;

neml

nemlich log. 10 × 11682 = 5,0675172
log. 20,8128 = 1,3183310

log. x = 3,7491862 = log. 5612,9.

Folglich machen 10 baierische ℔, 5612,9 franz. Gramm.

Anmerkung. Auf ähnliche Art lassen sich vermittels der Tabelle die Gewichte verschiedener Oerter aufeinander reduciren.

II. Aufgabe:

Wie viel betragen 100 baierische Schuhe nach dem Wienerfußmaaße?

Auflösung:

1. Vermöge der Tabelle ist 1 baier. Schuh = 129,38 Paris. Linien, und 1 Wienerfuß = 140,13 Pariser Linien, also

Baier. Fuß : Wienerfuß = 129,38 : 140,13
und 140,13 baier. Fuß = 129,38 Wienerfuß,
folglich

2. 140,13 baier. Fuß : 100 b. F. = 129,38 W. F. : x Wienerfuß.

mithin $x = \frac{129,38 \times 100}{140,13} = \frac{1293800}{14013}$

3. Nun ist log. 1293800 = 6,1118671
log. 14013 = 4,1465311

log. x = 1,9653360 = 92,329.

folglich sind 100 baierische Fuß = 92,329 Wien. F.

An-

Anmerkung. Auf die nämliche Art lassen sich die Schuhe, und eben so die Ellen verschiedener Oerter aufeinander reduciren.

III. Aufgabe:

Wie viel betragen 50 baierische Chausséemeilen an Oestreicher Postmeilen?

I Auflösung:

Da vermöge der Meilentabelle

100 baierische Meilen = 99,818 geograph. Meilen
100 Oestreich. Meilen = 202,120 geogr. Meil.; so ist
baier. Meile : Oestr. Meile = 99,818 : 102,120, und
102,120 baier. Meilen = 99,818 östreich. Meil.
folglich:

102,120 b. Meil. : 50 b. M. = 99,818 östr. M. : x öst. M.

Und $x = \frac{50 \times 99,818}{102,120}$

Nun ist log. 50 = 1,6989700
log. 99,818 = 1,9992089
compl. dec. log. 102,120 = 7,9908892—10 (§. 249.)

log. x = 1,6890681 = log. 48,873

Mithin sind 50 baier. M. = 48,873 östr. Postmeilen.

II. Auflösung:

Vermöge der nemlichen Tabelle ist

1 baier. Meile = 22826,6 Pariser Fuß
1 östr. Meile = 23354,5 Pariser Fuß, mithin
1 b. M. : 1 öst. M. = 22826,6 : 23354,5, und
23354,5 baier. M. = 22826,6 öst. Meil.; folglich

23354,5

23354,5 b. M. : 50 b. M. = 22826,6 bstr. M. : x bstr. M.

Also $x = \frac{50 \times 22826,6}{23354,5}$

Nun ist log. 50 = 1,6989700

log. 22826,6 = 4,3584412

compl. dec. log. 23354,5 = 5,6316294 — 10

log. x = 1,6890406 = log. 48,87

folglich wie vorher 50 b. M. = 48,87 bstr. Meilen.

III. Auflösung.

Nach der nemlichen Tabelle sind.

15,028 baierische Meilen = 1 Meridiangrad

14,69 bstreich. Meilen = 1 Meridiangrad, mithin

15,028 baierische Meilen = 14,69 bstr. Meilen, also

15,028 b. M. : 50 baier. M. = 14,69 bstr. M. : x bstr. M.

Mithin $x = \frac{50 \times 14,69}{15,028}$

Nun ist log. 50 = 1,6989700

log. 14,69 = 1,1670218

compl. dec. log. 15,028 = 8,8230988 — 10

log. x = 1,6890906 = log. 48,875

folglich wie in der vorigen Auflösung:

50 b. M. = 48,875 bstr. M.

IV. Aufgabe:

Wie viel betragen 200 geogr. □ Meilen nach Klügel an baierischen □ Meilen?

Auflösung:

Vermöge der letzten Spalte in der Meilen-Tabelle sind

1003,7

1003,7 baier. □ Meilen = 1000 geogr. □ Meilen, mithin ist

1000 geogr. □ M. : 200 ge. □ M. = 1003,7 b. □ M. : x b. □ M.

folglich $x = \frac{200 \times 1003,7}{1000} = \frac{1003,7}{5}$

Nun ist log. 1003,7 = 3,0016039

log. 5 = 0,6989700

log. x = 2,3026339 = log. 200,74

folglich sind 200 geogr. □ M. = 200,74 baier. □ M.

V. Aufgabe:

Wie viel betragen 200 baierische □ Meilen an französischen alten Lieues?

Auflösung:

Aus eben der Tabelle letzten Spalte ist

1003,7 b. □ Meilen = 1000 geogr. □ Meilen = 11334 □ lieues,

mithin

1003,7 b. □ M. : 200 b. □ M. = 11334 □ l. : x □ l.

folglich $x = \frac{200 \times 11334}{1003,7}$

Nun ist log. 200 = 2,3010300

log. 11334 = 4,0543832

c. dec. log. 1003,7 = 6,9983961 — 10

log. x = 3,3538093 = log. 2258,44

Folglich sind 200 baier. □ Meilen = 2258,44 alten Lieues.

An-

Anmerkung: Die folgenden Tabellen sind, so wie ihr Gebrauch zum Theile für sich schon, zum Theil aus den bisherigen Aufgaben verständlich.

§. 271.

Erklärungen:

a. Der Inbegriff von Regeln, welche die Auflösung §. 215 angiebt, um eine Größe in mehrere proportionale Theile zu theilen, heißt **Gesellschaftsregel** (regula societatis), in wie ferne durch dieselbe der gemeinschaftliche Gewinnst oder Verlust der Einlage gemäß vertheilet wird, die eine Gesellschaft mehrerer Personen zusammen getragen hat;

b. Dieser nemliche Inbegriff von Regeln hingegen heißt **Vermischungsregel**, in wie ferne durch solche die Größe der verschiedenen Bestandtheile bestimmet wird, woraus eine Sache nach einem festgesetzten Verhältnisse zusammengesetzet werden soll.

c. **Alligationsregel** wird jene Regel genannt, die angiebt, nach welchem Verhältnisse 2 oder mehrere Dinge gemischet werden sollen, damit ein mittlerer Werth herauskomme.. §. 151. VII. Beyspiel allgemein aufgelöset stellet diese Regel für leichtere Fälle dar.

§. 272.

Beyspiele zur Uebung:

I. Aufgabe:

Drey Kaufleute gewinnen in der Handlung 4000 Fl., der erste hat dazu 10000 Fl., der zweyte 7000 Fl.

der

der dritte 3000 Fl. gegeben. Wie viel gehöhret jedem seiner Einlage gemäß?

Auflösung:

Im gegebenen Falle ist §. 215. B = 4000; a = 10000 b = 7000: c = 3000, folglich

$$20000 : 4000 = 10000 : x$$
$$= 7000 : y$$
$$= 3000 : z;$$

Der Antheil des ersten x = 2000 Fl.
des zweyten y = 1400 Fl.
des dritten z = 600 Fl.

$$x + y + z = 4000 \text{ Fl.} = B.$$

II. Aufgabe:

Wenn bey einem guten Schießpulver zu 16 Loth Salpeter, 3 Loth Kohlen, und 2 Loth Schwefel gehören, wie viel von jeder Art gehören zu 100 ℔ Schießpulver:

Auflösung:

In dieser Aufgabe ist B = 100 ℔; a = 16 Loth; b = 3 L. c = 2 Loth; mithin

$$21 \text{ Loth} : 100 \text{ ℔} = 16 \text{ Loth} : x \text{ ℔}$$
$$= 3 : y$$
$$= 2 : x$$

Folglich der Antheil vom Salpeter $x = 76\frac{4}{21}$ ℔
von Kohlen $y = 14\frac{6}{21}$
vom Schwefel $z = 9\frac{11}{21}$

$$x + y + z = 100 \text{ ℔} = B.$$

§. 273.

§. 273.

Erklärung:

Wenn eine Gesellschaft die Verbindlichkeit übernimmt, den unter ihren Mitgliedern durch eine Feuersbrunst entstehenden Schaden zu ersetzen, so heißt diese Veranstaltung eine **Feuer- oder Brand-Assecuranz.**

I. Zusatz: Da offenbar, bey gleicher Gefahr der assecurirten Gebäude, der Beytrag eines jeden Mitgliedes der Größe des Ersatzes, den ein Glied in ähnlichen Unglücksfällen für sich fodert, also dem Werthe des assecurirten Gebäudes proportionirt seyn muß, so geschieht die Berechnung ebenfalls nach den Regeln des 215ten §., wo es aber vom Vertrage abhängt, ob zum Ersatz alle, mithin auch die verunglückten Mitglieder, oder aber nur diejenigen allemal beytragen, die vom Unglücke verschont blieben; in jedem Falle bezeichnet B (§. 215.) den Werth des erlittenen Schadens von assecurirten Gebäuden, $a + b + c$ u. s. f. den Werth aller Gebäude, deren Eigenthümer zum Ersatz gezogen werden, x, y, z etc. die jedes Mitglied treffende Rate.

II. Zusatz: Noch bequemer läßt sich der Beytrag für 100 fl. durch die gewöhnliche Regel Detri (§. 269.), berechnen. Drückt nemlich B den Werth des ganzen Schadens, S den Werth aller assecurirten Gebäude, deren Eigenthümer zum Ersatz gezogen werden, und q die für 100 fl. treffende Rate aus, so ist

$$S : B = 100 \text{ fl.} : q \text{ fl.}$$

woraus sich allemal leicht die ein jedes Mitglied treffende Rate ergiebt.

III. Zu-

III. Zusatz: Aus der Natur einer Feuerassecuranz fliessen folgende Bedingungen:

a. Jedes Mittglied muß für die Gebäude und Güter, die es versichern lassen will, einen solchen Werth angeben, der den wahren nicht übersteigt.

b. Nur jener Feuerschaden muß von der Gesellschaft vergütet werden, der sich ohne verschulden des Eigenthümers ergiebt, und welcher durch eine Commission als richtig anerkannt ist.

c. Sehr feuergefährliche Gebäude müssen entweder in die Assecuranz gar nicht aufgenommen, oder zu einem gröſsern Beytrage angehalten werden; überhaupt müssen die Vorstände wachen, daß die nächsten Feuersgefahren entfernt, und die nöthigen Löschanstalten, wo sie noch nicht vorhanden sind, beygeschafft werden.

I. Anmerkung: Bey der in Baiern, Oberpfalz, Sulzbach und Neuburg errichteten Brandassecuranz bestehen laut Generalverordnung vom 17. Sept. 1799 folgende Bedingungen:

a. Nur Gebäude werden versichert, hingegen

b. Mobilien, so wie selbst sehr feuergefährliche Gebäude, als Ziegelhütten, Schmelz- und Eisenwerke, Pulvermühlen, Glashütten, Hanf- und Flachsdörren sind davon ausgeschlossen.

c. Jeder Eigenthümer kann den Werth jener Gebäude, die er assecuriren lassen will, nach Belieben angeben, nur darf solcher nie gröſser als der wahre seyn.

d. Die jährlichen Regiekösten werden zum jährlich sich ergebenden Brandschaden geschlagen, und zum

Er-

Ersatz concurrirt allemal die gesammte assecurirte Masse, so daß also die vom Schaden betroffenen Mitglieder davon nicht davon ausgenommen sind.

e. Feuerschäden, die durch Schuld des Eigenthümers, auf Befehl des Feindes, oder zur Vertheidigung der Kriegsvölker entstehen, werden von der Gesellschaft nicht vergütet.

II. Anmerkung: Der Werth aller assecurirten Gebäude betrug im ersten Jahre, oder 1800 die Summe von 25'381,975 fl.; die vorgefallenen Brandschäden machten zusammen 86074 fl. 30 kr., die Regiekösten 1378 fl. 54 kr. 2 dl.; folglich von 100 fl. war die Concurrenz 22 kr.

Im zweyten Jahre 1801 stieg assecurirte Masse auf 39'592,550 fl.; die Summe der Brandschäden war 36368 fl. 37 kr. 2 dl.; die Regiekösten beliefen sich auf 1765 fl. 31 kr. 2 dl.; mithin von 100 fl. trift 6 kr. Concurrenz.

Im dritten Jahre 1802 war der Werth der assecurirten Gebäude 47'751,475 fl., der ganze Schaden 79697 fl. 27 kr., Regiekösten 2276 fl. 35 kr.; folglich von 100 fl. der Beytrag 10 kr.

Im vierten Jahre 1803 Werth der ganzen assecurirten Masse 62'981,700 fl., Totalschaden 33568 fl. 14 kr., Regiekösten 1776 fl. 21 kr. 3 dl.; folglich von 100 fl. der Beytrag 3 kr.

Im fünften Jahre 1804 Werth aller assecurirten Gebäude 71'942,075 fl., der erlittene ganze Schaden 83484 fl. 18 kr.

§. 274.

§. 274.

Erklärungen:

a. Wenn das Verhältniß zweyer Größen aus zwey Verhältnissen zusammengesetzet ist (§. 219. II. Zus.), so heißt die Regel, nach welcher aus 5 gegebenen Gliedern der zwey Proportionen eine von den beyden Größen bestimmet wird, die regula quinque, und

b. überhaupt heißt die Regel, nach welcher eine von den beyden Größen, die in einem zusammengesetzten Verhältnisse stehen, aus den übrigen gegebenen Gliedern gefunden wird, die **Kettenregel**, oder die zusammengesetzte **Regel Detri** (regula composita).

§. 275.

Aufgabe:

Wenn 9000 Fl. in 3 Jahren 390 Fl. Interessen bringen; wie viel Fl. bringen zu gleichen Procenten 11000 Fl. in 5 Jahren.

Auflösung:

1. Man bezeichne das treffende Interesse von 11000 Fl. in 3 Jahren mit y; hingegen das gesuchte Interesse eben dieses Capitals in 5 Jahren mit x, so ist §. 267.

2. 9000 Fl. : 11000 Fl. = 390 Fl. Int. : y Fl. Int.
   3 Jahre : 5 Jahre = y Fl. Int. : x Fl. Int., oder

3. 9000 : 11000 = 390 : y
   3 : 5 = y : x; folglich §. 219. II. Zus.
   27000 : 55000 = 390 : x oder
   27 : 55 = 390 : x
   9 : 55 = 130 x, folglich

$$x = \frac{55 \times 130}{9} = 794\,\tfrac{4}{9}\text{ Fl.}$$

I. Zusatz: Wenn E, ε, e verschiedene Wirkungen C, c die Ursachen, T, t die Zeiten, in welchen die Ursachen wirken, bezeichnen, so daß C, T, E, ferner C, t, ε; und c, t, e allemal zusammen gehören, so ist aus §. 267.

1. für einerley Ursache C; $T : t = E : e$
2. für gleiche Zeiten t; $C : c = \varepsilon : e$; mithin
3. nach §. 219. II. Zus. $CT : ct = E : e$; folglich

$$eCT = Ect.$$

Es versteht sich von selbst, daß dieses nur insoferne gilt, in wie ferne diese Größen als gezählte Größen, mithin als Zahlen genommen werden, welches bey der Anwendung dieses, so wie in der Folge eines jeden andern Formulars allemal zu verstehen ist.

II. Zusatz: Aus letzter Gleichung läßt sich, wenn von den 6 Dingen 5 gegeben sind, jedes unbekannte 6te Ding finden, sie dient also eine Menge Proportionen als Gleichungen aufzulösen, wenn nemlich die Glieder als Ursachen, Wirkungen u. s. w. einander bestimmen; noch ausgedehnter wird ihre Anwendung, wenn man sich unter E, e die bestimmten Größen, und unter C, c, T, t ihre Bestimmungsgründe, d. i. jene Größen denket, durch welche erstere bestimmet werden.

III. Zusatz: Verwandelt man eine gegebene Aufgabe nach dieser Formel in weiterer Bedeutung in eine Gleichung, setzet zwischen die gleichen Producte einen Verticalstrich, und suchet nach §. 151 den Werth der unbekannten Größe, so heißt diese Auflösungsmethode die Reesische Regel, von einem Holländer de Rees, also genannt.

I. Beyſpiel.

Zwölf Arbeiter rücken mit einem Graben in 3 Tagen 60 Fuß fort, wie viele Tage brauchen 15 Arbeiter zu 520 Fuß?

Auflöſung:

In dieſem Beyſpiel wird e = 60 F.; c = 12 Arb.; t = 3 Tage: Und E = 520 Fuß; C = 15 Arbeiter; T = x.

Mithin: $60 \times 15 \times x = 520 \times 12 \times 3$, und

$$x = \frac{520 \times 12 \times 3}{60 \times 15} = \frac{52 \times 2}{5} = \frac{104}{5} = 20\frac{4}{5} \text{ Tage.}$$

Oder nach der Reeſiſchen Regel:

T. x } 520 Fuß. Graben.
Perſ. 15 }
60 F. } 3 T.
5 } 12 Perſ.
2

Mithin ebenfalls $5x = 52 \times 2$; $x = \frac{104}{5}$

II. Beyſpiel:

Wenn von einem Stück Tuche, das $\frac{7}{4}$ Ellen breit iſt, 6 Ellen zu einem Kleide gehören, wie viel Ellen ſind dazu nöthig, wenn das Stück Tuch nur $\frac{5}{4}$ breit iſt?

Auflöſung:

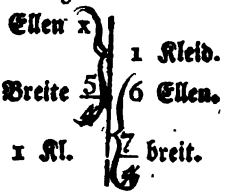
In dieſem Beyſpiele iſt E = e = der zum Kleide erfoderlichen Menge Tuches, dieſe hängt nun von der Länge und Breite des Stückes ab, man kann alſo C. T = $\frac{7}{4} \times 6$, und ct = $\frac{5}{4} \times x$ ſetzen; mithin iſt

$\frac{5}{4} x = \frac{7}{4} \cdot 6$; oder

$5x = 42$; $x = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$ Ellen.

Nach

Nach der Reesischen Regel:



Folglich wieder $5x = 42$; und $x = \frac{42}{5}$

III. Abschnitt.

Anwendung der Progressionslehre.

§. 276.

Erklärungen:

Wenn an Jemand eine Summe Geldes zum Gebrauche auf eine Zeit überlassen wird, so fordert man gewöhnlich eine gewisse Summe dafür, es heißt nun

a. die gelehnte Summe Geld das **Capital**;

b. die für den einjährigen Gebrauch desselben geforderte Summe, das **Interesse**, oder der **Zins**, z. B. 5 von 100 Fl., und zwar

α. einfacher Zins, welcher nur vom Capital allein entrichtet wird, selbst wenn mehrere Zinstermine ausstehen, und die treffenden Zinse nicht entrichtet werden;

β. Zinseszinse, wo der fällige Zins nicht abgetragen, sondern von seiner Zahlzeit an als Capital betrachtet wird, und folglich wie selbes verzinset werden muß.

c. Die Rechnung, wo die einfachen Zinsen bestimmet werden, die einfache Zinsrechnung; wo hinge-

Anmerkung. Auf die nämliche Art lassen sich die Schuhe, und eben so die Ellen verschiedener Oerter aufeinander reduciren.

III. Aufgabe:

Wie viel betragen 50 baierische Chausséemeilen an Oestreicher Postmeilen?

I Auflösung:

Da vermöge der Meilentabelle

100 baierische Meilen = 99,818 geograph. Meilen
100 Oestreich. Meilen = 202,120 geogr. Meil.; so ist
baier. Meile : Oestr. Meile = 99,818 : 102,120, und
102,120 baier. Meilen = 99,818 östreich. Meil.
folglich:

102,120 b. Meil. : 50 b. M. = 99,818 östr. M. : x öst. M.

Und $x = \frac{50 \times 99.818}{102,120}$

Nun ist log. 50 = 1,6989700
log. 99,818 = 1,9992089
compl. dec. log. 102,120 = 7,9908892—10 (§. 249.)

log. x = 1,6890681 = log. 48,873

Mithin sind 50 baier. M. = 48,873 östr. Postmeilen.

II. Auflösung:

Vermöge der nemlichen Tabelle ist

1 baier. Meile = 22826,6 Pariser Fuß
1 östr. Meile = 23354,5 Pariser Fuß, mithin
1 b. M. : 1 öst. M. = 22826,6 : 23354,5, und
23354,5 baier. M. = 22826,6 öst. Meil.; folglich

23354,5

23354,5 b. M. : 50 b. M. = 22826,6 bstr. M. : x bstr. M.

Also $x = \frac{50 \times 22826,6}{23354,5}$

Nun ist log. 50 = 1,6989700

log. 22826,6 = 4,3584412

compl. dec. log. 23354,5 = 5,6316294 — 10

log. x = 1,6890406 = log. 48,87

folglich wie vorher 50 b. M. = 48,87 bstr. Meilen.

III. Auflösung.

Nach der nemlichen Tabelle sind.

15,028 baierische Meilen = 1 Meridiangrad

14,69 bstreich. Meilen = 1 Meridiangrad, mithin

15,028 baierische Meilen = 14,69 bstr. Meilen, also

15,028 b. M. : 50 baier. M. = 14,69 bstr. M. : x bstr. M.

Mithin $x = \frac{50 \times 14,69}{15,028}$

Nun ist log. 50 = 1,6989700

log. 14,69 = 1,1670218

compl. dec. log. 15,028 = 8,8230988 — 10

log. x = 1,6890906 = log. 48,875

folglich wie in der vorigen Auflösung:

50 b. M. = 48,875 bstr. M.

IV. Aufgabe:

Wie viel betragen 200 geogr. □ Meilen nach Klügel an baierischen □ Meilen?

Auflösung:

Vermöge der letzten Spalte in der Meilen-Tabelle sind

1003,7

1003,7 baier. □ Meilen = 1000 geogr. □ Meilen, mithin ist

1000 geogr. □ M. : 200 ge. □ M. = 1003,7 b. □ M. : x b. □ M.

folglich $x = \frac{200 \times 1003,7}{1000} = \frac{1003,7}{5}$

Nun ist log. 1003,7 = 3,0016039

log. 5 = 0,6989700

log. x = 2,3026339 = log. 200,74

folglich sind 200 geogr. □ M. = 200,74 baier. □ M.

V. Aufgabe:

Wie viel betragen 200 baierische □ Meilen an französischen alten Lieues?

Auflösung:

Aus eben der Tabelle letzten Spalte ist

1003,7 b. □ Meilen = 1000 geogr. □ Meilen = 11334 □ lieues,

mithin

1003,7 b. □ M. : 200 b. □ M. = 11334 □ l. : x □ l.

folglich $x = \frac{200 \times 11334}{1003,7}$

Nun ist log. 200 = 2,3010300

log. 11334 = 4,0543832

c. dec. log. 1003,7 = 6,9983961 — 10

log. x = 3,3538093 = log. 2258,44

Folglich sind 200 baier. □ Meilen = 2258,44 alten Lieues.

An-

Anmerkung: Die folgenden Tabellen sind, so wie ihr Gebrauch zum Theile für sich schon, zum Theil aus den bisherigen Aufgaben verständlich.

§. 271.

Erklärungen:

a Der Inbegriff von Regeln, welche die Auflösung §. 215 angiebt, um eine Größe in mehrere proportionäle Theile zu theilen, heißt **Gesellschaftsregel** (regula societatis), in wie ferne durch dieselbe der gemeinschaftliche Gewinnst oder Verlust der Einlage gemäß vertheilet wird, die eine Gesellschaft mehrerer Personen zusammen getragen hat;

b. Dieser nemliche Inbegriff von Regeln hingegen heißt **Vermischungsregel**, in wie ferne durch solche die Größe der verschiedenen Bestandtheile bestimmet wird, woraus eine Sache nach einem festgesetzten Verhältnisse zusammengesetzet werden soll.

c. **Alligationsregel** wird jene Regel genannt, die angiebt, nach welchem Verhältnisse 2 oder mehrere Dinge gemischet werden sollen, damit ein mittlerer Werth herauskomme.. §. 151. VII. Beyspiel allgemein aufgelöset stellet diese Regel für leichtere Fälle dar.

§. 272.

Beyspiele zur Uebung:

I. Aufgabe:

Drey Kaufleute gewinnen in der Handlung 4000 Fl., der erste hat dazu 10000 Fl., der zweyte 7000 Fl.

der dritte 3000 Fl. gegeben. Wie viel gebühret jedem seiner Einlage gemäß?

Auflösung:

Im gegebenen Falle ist §. 215. B = 4000; a = 10000 b = 7000: c = 3000, folglich

20000 : 4000 = 10000 : x
= 7000 : y
= 3000 : z;

Der Antheil des ersten x = 2000 Fl.
des zweyten y = 1400 Fl.
des dritten z = 600 Fl.

x + y + z = 4000 Fl. = B.

II. Aufgabe:

Wenn bey einem guten Schießpulver zu 16 Loth Salpeter, 3 Loth Kohlen, und 2 Loth Schwefel gehören, wie viel von jeder Art gehören zu 100 lb Schießpulver:

Auflösung:

In dieser Aufgabe ist B = 100 lb; a = 16 Loth; b = 3 L. c = 2 Loth; mithin

21 Loth : 100 lb = 16 Loth : x lb
= 3 : y
= 2 : x

Folglich der Antheil vom Salpeter x = $76\frac{4}{21}$ lb
von Kohlen y = $14\frac{6}{21}$
vom Schwefel z = $9\frac{11}{21}$

x + y + z = 100 lb = B.

§. 273.

§. 273.

Erklärung:

Wenn eine Gesellschaft die Verbindlichkeit übernimmt, den unter ihren Mitgliedern durch eine Feuersbrunst entstehenden Schaden zu ersetzen, so heißt diese Veranstaltung eine Feuer- oder Brand-Assecuranz.

I. Zusatz: Da offenbar, bey gleicher Gefahr der assecurirten Gebäude, der Beytrag eines jeden Mitgliedes der Größe des Ersatzes, den ein Glied in ähnlichen Unglücksfällen für sich fodert, also dem Werthe des assecurirten Gebäudes proportionirt seyn muß, so geschieht die Berechnung ebenfalls nach den Regeln des 215ten §., wo es aber vom Vertrage abhängt, ob zum Ersatz alle, mithin auch die verunglückten Mitglieder, oder aber nur diejenigen allemal beytragen, die vom Unglücke verschont blieben; in jedem Falle bezeichnet B (§. 215.) den Werth des erlittenen Schadens von assecurirten Gebäuden, $a + b + c$ u. s. f. den Werth aller Gebäude, deren Eigenthümer zum Ersatz gezogen werden, x, y, z etc. die jedes Mitglied treffende Rate.

II. Zusatz: Noch bequemer läßt sich der Beytrag für 100 fl. durch die gewöhnliche Regel Detri (§. 269.), berechnen. Drückt nemlich B den Werth des ganzen Schadens, S den Werth aller assecurirten Gebäude, deren Eigenthümer zum Ersatz gezogen werden, und q die für 100 fl. treffende Rate aus, so ist

$$S : B = 100 \text{ fl.} : q \text{ fl.}$$

woraus sich allemal leicht die ein jedes Mitglied treffende Rate ergiebt.

III. Zu-

III. Zusatz: Aus der Natur einer Feuerassecuranz fliessen folgende Bedingungen:

a. Jedes Mittglied muß für die Gebäude und Güter, die es versichern lassen will, einen solchen Werth angeben, der den wahren nicht übersteigt.

b. Nur jener Feuerschaden muß von der Gesellschaft vergütet werden, der sich ohne verschulden des Eigenthümers ergiebt, und welcher durch eine Commission als richtig anerkannt ist.

c. Sehr feuergefährliche Gebäude müssen entweder in die Assecuranz gar nicht aufgenommen, oder zu einem grösern Beytrage angehalten werden; überhaupt müssen die Vorstände wachen, daß die nächsten Feuersgefahren entfernt, und die nöthigen Löschanstalten, wo sie noch nicht vorhanden sind, beygeschafft werden.

I. Anmerkung: Bey der in Baiern, Obernpfalz, Sulzbach und Neuburg errichteten Brandassecuranz bestehen laut Generalverordnung vom 17. Sept. 1799 folgende Bedingungen:

a. Nur Gebäude werden versichert, hingegen

b. Mobilien, so wie selbst sehr feuergefährliche Gebäude, als Ziegelhütten, Schmelz- und Eisenwerke, Pulvermühlen, Glashütten, Hanf- und Flachsdörren sind davon ausgeschlossen.

c. Jeder Eigenthümer kann den Werth jener Gebäude, die er assecuriren lassen will, nach Belieben angeben, nur darf solcher nie grösser als der wahre seyn.

d. Die jährlichen Regiekösten werden zum jährlich sich ergebenden Brandschaden geschlagen, und zum

Er-

Ersatz concurrirt allemal die gesammte assecurirte Masse, so daß also die vom Schaden betroffenen Mitglieder davon nicht davon ausgenommen sind.

e. Feuerschäden, die durch Schuld des Eigenthümers, auf Befehl des Feindes, oder zur Vertheidigung der Kriegsvölker entstehen, werden von der Gesellschaft nicht vergütet.

II. Anmerkung: Der Werth aller assecurirten Gebäude betrug im ersten Jahre, oder 1800 die Summe von 25'381,975 fl.; die vorgefallenen Brandschäden machten zusammen 86074 fl. 30 kr., die Regiekösten 1378 fl. 54 kr. 2 dl.; folglich von 100 fl. war die Concurrenz 22 kr.

Im zweyten Jahre 1801 stieg assecurirte Masse auf 39'592,550 fl.; die Summe der Brandschäden war 36308 fl. 37 kr. 2 dl.; die Regiekösten beliefen sich auf 1765 fl. 31 kr. 2 dl.; mithin von 100 fl. trift 6 kr. Concurrenz.

Im dritten Jahre 1802 war der Werth der assecurirten Gebäude 47'751,475 fl., der ganze Schaden 79697 fl. 27 kr., Regiekösten 2276 fl. 35 kr.; folglich von 100 fl. der Beytrag 10 kr.

Im vierten Jahre 1803 Werth der ganzen assecurirten Masse 62'981,700 fl., Totalschaden 33568 fl. 14 kr., Regiekösten 1776 fl. 21 kr. 3 dl.; folglich von 100 fl. der Beytrag 3 kr.

Im fünften Jahre 1804 Werth aller assecurirten Gebäude 71'942,075 fl., der erlittene ganze Schaden 83484 fl. 18 kr.

§. 274.

§. 274.

Erklärungen:

a. Wenn das Verhältniß zweyer Größen aus zwey Verhältnissen zusammengesetzet ist (§. 219. II. Zus.), so heißt die Regel, nach welcher aus 5 gegebenen Gliedern der zwey Proportionen eine von den beyden Größen bestimmet wird, die regula quinque, und

b. überhaupt heißt die Regel, nach welcher eine von den beyden Größen, die in einem zusammengesetzten Verhältnisse stehen, aus den übrigen gegebenen Gliedern gefunden wird, die **Kettenregel**, oder die zusammengesetzte **Regel Detri** (regula composita).

§. 275.

Aufgabe:

Wenn 9000 Fl. in 3 Jahren 390 Fl. Interessen bringen; wie viel Fl. bringen zu gleichen Procenten 11000 Fl. in 5 Jahren.

Auflösung:

1. Man bezeichne das treffende Interesse von 11000 Fl. in 3 Jahren mit y; hingegen das gesuchte Interesse eben dieses Capitals in 5 Jahren mit x, so ist §. 267.

2. 9000 Fl. : 11000 Fl. = 390 Fl. Int. : y Fl. Int.
   3 Jahre : 5 Jahre = y Fl. Int. : x Fl. Int., oder

3. 9000 : 11000 = 390 : y
   3 : 5 = y : x; folglich §. 219. II. Zus.
   27000 : 55000 = 390 : x oder
   27 : 55 = 390 : x
   9 : 55 = 130 x, folglich

$$x = \frac{55 \times 130}{9} = 794\ \tfrac{4}{9}\ \text{Fl.}$$

I. Zusatz: Wenn E, ε, e verschiedene Wirkungen C, c die Ursachen, T, t die Zeiten, in welchen die Ursachen wirken, bezeichnen, so daß C, T, E, ferner C, t, ε; und c, t, e allemal zusammen gehören, so ist aus §. 267.

1. für einerley Ursache C; T : t = E : e

2. für gleiche Zeiten t; C : c = ε : e; mithin

3. nach §. 219. II. Zus. CT : ct = E : e; folglich

eGT = Ect.

Es versteht sich von selbst, daß dieses nur insoferne gilt, in wie ferne diese Größen als gezählte Größen, mithin als Zahlen genommen werden, welches bey der Anwendung dieses, so wie in der Folge eines jeden andern Formulars allemal zu verstehen ist.

II. Zusatz: Aus letzter Gleichung läßt sich, wenn von den 6 Dingen 5 gegeben sind, jedes unbekannte 6te Ding finden, sie dient also eine Menge Proportionen als Gleichungen aufzulösen, wenn nemlich die Glieder als Ursachen, Wirkungen u. s. w. einander bestimmen; noch ausgedehnter wird ihre Anwendung, wenn man sich unter E, e die bestimmten Größen, und unter C, c, T, t ihre Bestimmungsgründe, d. i. jene Größen denket, durch welche erstere bestimmet werden.

III. Zusatz: Verwandelt man eine gegebene Aufgabe nach dieser Formel in weiterer Bedeutung in eine Gleichung, setzet zwischen die gleichen Producte einen Verticalstrich, und suchet nach §. 151 den Werth der unbekannten Größe, so heißt diese Auflösungsmethode die Reesische Regel, von einem Holländer de Rees, also genannt.

I. Beyspiel.

Zwölf Arbeiter rücken mit einem Graben in 3 Tagen 60 Fuß fort, wie viele Tage brauchen 15 Arbeiter zu 520 Fuß?

Auflösung:

In diesem Beyspiel wird $e = 60$ F.; $c = 12$ Arb.; $t = 3$ Tage: Und $E = 520$ Fuß; $C = 15$ Arbeiter; $T = x$.

Mithin: $60 \times 15 \times x = 520 \times 12 \times 3$, und

$$x = \frac{520 \times 12 \times 3}{60 \times 15} = \frac{52 \times 2}{5} = \frac{104}{5} = 20\tfrac{4}{5} \text{ Tage.}$$

Oder nach der Reesischen Regel:

T. x	52~~0~~ Fuß. Graben.
Pers. 1~~5~~	~~3~~ T.
~~60~~ F.	~~12~~ Pers.
5	2

Mithin ebenfalls $5x = 52 \times 2$; $x = \frac{104}{5}$

II. Beyspiel:

Wenn von einem Stück Tuche, das $\frac{7}{4}$ Ellen breit ist, 6 Ellen zu einem Kleide gehören, wie viel Ellen sind dazu nöthig, wenn das Stück Tuch nur $\frac{5}{4}$ breit ist?

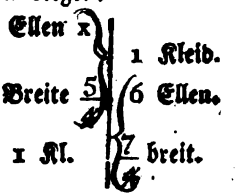
Auflösung:

In diesem Beyspiele ist $E = e =$ der zum Kleide erfoderlichen Menge Tuches, diese hängt nun von der Länge und Breite des Stückes ab, man kann also $C.T = \frac{7}{4} \times 6$, und $ct = \frac{5}{4} \times x$ setzen; mithin ist $\frac{5}{4}x = \frac{7}{4}.6$; oder

$5x = 42$; $x = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$ Ellen.

Nach

Nach der Reesischen Regel:



Folglich wieder $5x = 42$; und $x = \frac{42}{5}$

III. Abschnitt.

Anwendung der Progressionslehre.

§. 276.

Erklärungen:

Wenn an Jemand eine Summe Geldes zum Gebrauche auf eine Zeit überlassen wird, so fordert man gewöhnlich eine gewisse Summe dafür, es heißt nun

a. die gelehnte Summe Geld das **Capital**;

b. die für den einjährigen Gebrauch desselben geforderte Summe, das **Interesse**, oder der **Zins**, z. B. 5 von 100 Fl., und zwar

α. **einfacher Zins**, welcher nur vom Capital allein entrichtet wird, selbst wenn mehrere Zinstermine ausstehen, und die treffenden Zinse nicht entrichtet werden;

β. **Zinseszinse**, wo der fällige Zins nicht abgetragen, sondern von seiner Zahlzeit an als Capital betrachtet wird, und folglich wie selbes verzinset werden muß.

c. Die Rechnung, wo die einfachen Zinsen bestimmet werden, die **einfache Zinsrechnung**; wo hinge-

gen die Zinseszinsen mit bestimmet werden, die zusammengesetzte Zinsrechnung.

I. Zusatz: Die einfache Zinsrechnung ist als eine Anwendung der Proportionslehre aus dem vorhergehenden Abschnitte hinlänglich klar.

II. Zusatz: Wenn das Capital q jährlich an Interesse p abträgt, so beträgt das Capital a zu gleichen Procent sammt dem Interesse α nach einem Jahre so viel als der Bruch $\frac{q+p}{q}$ a angiebt, das ist:

$$a + \alpha = \frac{q+p}{q} a.$$

Denn $q : a = p : \alpha$ (§. 267.) mithin ist

$$\alpha = \frac{p}{q} a, \text{ folglich}$$

$$a + \alpha = a + \frac{p}{q} a = (1 + \frac{p}{q}) a = \frac{q+p}{q} a.$$

III. Zusatz: Zu 5 Procent wird $q = 100$, $p = 5$, mithin

$\frac{q+p}{q} = \frac{100+5}{100} = \frac{21}{20}$, und

log. $\frac{21}{20}$ = 0,0211893

log. $\frac{20}{21}$ = 0,9788107 — 1

IV. Zusatz: Bey 4 Procent ist

$\frac{q+p}{q} = \frac{100+4}{100} = \frac{26}{25}$

log. $\frac{26}{25}$ = 0,0170333

log. $\frac{25}{26}$ = 0,9829667 — 1

V. Zu-

V. Zusatz: Für 3 Procent wird

$\frac{q+p}{q} = \frac{103}{100}$; log. $\frac{103}{100} = 0{,}0128372$

log. $\frac{100}{103} = 0{,}9871628 - 1$

VI. Zusatz: Erhält überhaupt die Größe a jährlich im Verhältnisse q : p den Zuwachs α, leidet zugleich aber im Verhältnisse q : r die Abnahme β, so ist nach einem Jahre ihre veränderte Größe:

$$A = a + \alpha - \beta = \frac{q+p-r}{q}\, a.$$

Denn $q : a = p : \alpha$; also $\alpha = \frac{p}{q}\, a$

$$q : a = r : \beta; \qquad \beta = \frac{r}{q}\, a$$

mithin $a + \alpha - \beta = a + \frac{p}{q}a - \frac{r}{q}a = \frac{q+p-r}{q}a$

§. 277.

Lehrsatz:

Wenn das Capital q jährlich an Interesse p giebt, so giebt das Capital a in n Jahren, wenn man immer die Zinse zu dem Capital schlägt, d. i. das Capital mit Zinseszinsen, oder $s = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a$

Beweis:

1. Nach dem ersten Jahre ist Capital sammt dem Zinse oder $A = \frac{q+p}{q}\, a$ (§. 276. II. Zus.)

2.

2. Nach dem zweyten Jahre, während welchem also A als das Capital betrachtet werden muß, ist wieder Capital sammt dem Zinse, oder $B = \frac{q+p}{q} A = \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 a$.

3. Aus den nemlichen Gründen ist nach dem 3ten Jahre $C = \frac{q+p}{q} B = \left(\frac{q+p}{q}\right)^3 a$.

4. Nach dem vierten Jahre $D = \frac{q+p}{q} C = \left(\frac{q+p}{q}\right)^4 a$, folglich

5. Wird nach n Jahren das Capital sammt allen Zinseszinsen, oder $s = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a$.

Zusatz: Wenn von den 5 Stücken q, p, a, n, s vier bekannt sind, läßt sich allemal das 5te durch Rechnung finden, und da man gewöhnlich pro Cent rechnet, das ist, $q = 100$ Fl. setzet, so giebt es eigentlich vier verschiedene Aufgaben.

§. 278.

Aufgaben zur Uebung:

I. Aufgabe: Aus den gebenen q, p, a, n die Größe s bestimmen.

Auflösung: $s = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a$ (§. 277.).

Bey-

Beyspiel:

Zu welcher Summe erwachsen 100 Fl. zu 5 pro Cent. nebst Zinseszinsen in 20 Jahren?

Auflösung:

1. In diesem Beyspiele ist $q = a = 100$ Fl.; $p = 5$ Fl.; $n = 20$, mithin

2. $s = \left(\frac{105}{100}\right)^{20} 100 = \left(\frac{21}{20}\right)^{20} 100$

3. Nun ist aus §. 276. III. Zus.

log. $\frac{21}{20}$	= 0,0211893
n	= 20
log. $\left(\frac{21}{20}\right)^n$	= 0,4237860
log. 100	= 2,0000000
log. s	= 2,4237860 = log. 265,33

Mithin $s = 265$ Fl. 19 Kr. 3 Pf.

II. Aufgabe:

Aus den gegebenen p, q, n, s das Capital a finden.

Auflösung:

$$s = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a; \text{ mithin } a = s \times \left(\frac{q}{q+p}\right)^n$$

Beyspiel:

Wie groß muß das Capital seyn, damit es in 50 Jahren zu 5 pr. cent. sammt Zinseszinsen 1000 Fl. beträgt?

Auflösung:

1. Im gegenwärtigen Beyspiele ist $q = 100$; $p = 5$, $n = 50$, $s = 1000$, und man sucht a; mithin

2. $a = 1000 \times \left(\frac{100}{105}\right)^{50} = 1000 \times \left(\frac{20}{21}\right)^{50}$

3.

3. Nun ist aus §. 276. III. Zus.

$$\log. \tfrac{20}{21} = 0{,}9788107 - 1$$
$$n = 50$$

$$\log. \left(\tfrac{20}{21}\right)^n = 48{,}9405350 - 50$$
$$= 0{,}9405350 - 2$$

4. $\log. 1000 = 3{,}0000000$

$$\log. \left(\tfrac{20}{21}\right)^n = 0{,}9405350 - 2$$

$$\log. a = 1{,}9405350 = \log. 87{,}204$$

Folglich das gesuchte Capital $a = 87$ Fl. 12 Kr. 1 Pf.

III. Aufgabe:

Aus den gegebenen q, p, a, s die Anzahl der Jahre oder n suchen.

Auflösung:

$\left(\frac{q+p}{q}\right)^n a = s$; also $\left(\frac{q+p}{q}\right)^n = \frac{s}{a}$, mithin

$n \log. \left(\frac{q+p}{q}\right) = \log. \left(\frac{s}{a}\right)$ d. i.

$p \times [\log. (q+p) - \log. q] = \log. s - \log. a$,

folglich $n = \frac{\log. s - \log. a}{\log. (q+p) - \log. q}$

Beyspiel:

Wie lange muß 100 Fl. zu 5 pro Cent. aufgelegt seyn, bis es mit Zinseszinsen 1000 Fl. beträgt?

Auflösung:

1. Gegenwärtig ist $q = a = 100$ Fl., $p = 5$ Fl.; $s = 1000$, und n wird gesucht; mithin ist

2. $n = \frac{\log. 1000 - \log. 100}{\log. 105 - \log. 100} = \frac{3 - 2}{0,0211893}$

$= \frac{1}{0,0211893} = 47,1936$.

3. Folglich ist $n = 47$ Jahre, 2 Monathe, 10 Tage.

IV. Aufgabe;

Aus q, a, n, s die Größe p finden.

Auflösung;

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^n a = s; \text{ mithin } \left(\frac{q+p}{q}\right)^n = \frac{s}{a};$$

und $\frac{q+p}{q} = \sqrt[n]{\frac{s}{a}}$; $q+p = q\sqrt[n]{\frac{s}{a}}$,

folglich $p = q\sqrt[n]{\frac{s}{a}} - q$.

Will man mit Logarithmen rechnen, so ist

$$\log. (q+p) = \log. q + \frac{\log. s - \log. a}{n}$$

Aus dieser Gleichung, wenn man aus den Logarithmen ihre Zahlen wieder setzet, läßt sich ferner p finden.

Beyspiel:

Zu wie viel pro Cent. ist das Capital von 100 Fl. aufgelegt, wenn es in 20 Jahren sammt den Zinseszinsen 265 Fl. 19 Kr. 3 Pf. ausmacht.

Auflösung:

1. Im gegebenen Falle ist $q = a = 100$ Fl.; $n = 20$, $s = 265$ Fl. 19 Kr. 3 Pf. $= 265,33$ Fl., und man sucht p.

2. $\log.(100+p) = \frac{\log. 265,33 - \log. 100}{20} + \log. 100.$

3.

3. Nun ist $\log. 265{,}33 = 2{,}4237864$
$\log. 100 = 2{,}0000000$

$\log. 265{,}33 - \log. 100 = 0{,}4237864$, mithin

4. $\log.(100+p) = \frac{0{,}4237864}{20} + 2 = 2{,}0211893$
$= \log. 105$, mithin

5. $100+p = 105$, folglich $p = 5$; d. i. das Capital ist zu 5 pro Cent. aufgelegt.

§. 279.

Lehrsatz:

Wenn bey einer bestimmten Anzahl Menschen q, jährlich p Menschen gebohren werden, hingegen r Menschen sterben, nun aber die gesammte Menge der lebenden a ist, so ist nach n Jahren die Anzahl der lebenden, oder $s = \left(\frac{q+p-r}{q}\right)^n a$

Beweis:

1. Nach dem ersten Jahre wird die Anzahl aller lebenden
$A = \frac{q+p-r}{q} a$ (§. 276. VI. Zus.)

2. Am Ende des zweyten Jahres ist aus eben diesen Gründen die Anzahl der lebenden, oder
$B = \frac{q+p-r}{q} A = \left(\frac{q+p-r}{q}\right)^2 a$

3. Auf eben diese Art erhellet, daß am Ende des dritten Jahres die Anzahl
$C = \frac{q+p-r}{q} B = \left(\frac{q+p-r}{q}\right)^3 a$, folglich

4.

4. Wird nach n Jahren, wenn das Verhältniß der jährlich gebohrnen und verstorbenen immer das nemliche bleibt, die Anzahl aller lebenden,

$$s = \left(\frac{q+p-r}{q}\right)^n a$$

I. Zusatz: Die Verhältnisse der lebenden zu den jährlich gebohrnen und verstorbenen, d. i. $q:p$, und $q:r$ müssen für einen Ort, oder für ein ganzes Land aus den Erfahrungen mehrerer Jahre gesucht werden.

II. Zusatz: Wenn $p > r$, so nimmt die Bevölkerung zu; ist hingegen $p < r$, so nimmt solche ab, so wie für $p = r$, auch $s = a$ wird, mithin die Bevölkerung immer gleich bleibt.

III. Zusatz: Wenn z. B. an einem Orte die Anzahl der lebenden, oder $a = 10000$, und auf 250 Menschen jährlich 10 Geburten, und 7 Todfälle treffen, mithin $q = 250$; $p = 10$; $r = 7$ ist, so ist nach $n = 50$ Jahren die Anzahl der lebenden oder

$$s = \left(\tfrac{253}{250}\right)^{50} \times 10000$$

Nun ist log. 253 = 2,4031205
log. 250 = 2,3979400

log. $\frac{253}{250}$ = 0,0051805
50 = 50

log. $\left(\frac{253}{250}\right)^{50}$ = 0,2590250
= log. 1,8156,

folglich die Anzahl der Lebenden nach 50 Jahren, oder $s = 18156$.

§. 280.

§. 289.

Lehrsatz:

Wenn man von q jährlich p Zinsen erhält, und man legt für ähnliche Zinsen ein Capital a auf, vermehret solches jährlich um b, so wird nach n Jahren die Summe des gesammten aufliegenden Capitals mit Zinseszinsen

$$s = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (pa+qb) - qb}{p}$$

Beweis:

1. Am Ende des ersten Jahres ist Capital sammt dem Zinse $= \frac{q+p}{q} a$ (§. 276. II. Zus.), da man solches aber

2. um b vermehret, so ist nach Verlaufe des ersten Jahres das ganze aufliegende Capital

$$A = \frac{q+p}{q} a + b.$$

3. Am Ende des zweyten Jahres giebt nun dieses Capital sammt den Zinsen, und noch hinzukommenden b, oder

$$B = \frac{q+p}{q} A + b = \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 a + \left(\frac{q+p}{q}\right) b + b$$

4. Eben so wird nach dem dritten Jahre die ganze Summe

$$C = \frac{q+p}{q} B + b = \left(\frac{q+p}{q}\right)^3 a + \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 b + \left(\frac{q+p}{q}\right) b + b$$

5.

5. Am Ende des vierten Jahres

$$D = \frac{q+p}{q} C + b = \left(\frac{q+p}{q}\right)^4 a + \left(\frac{q+p}{q}\right)^3 b + \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 b + \left(\frac{q+p}{q}\right) b + b.$$

6. Aus den nemlichen Gründen wird endlich die ganze Summe s nach n Jahren

$$s = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a + \left(\frac{q+p}{q}\right)^{n-1} b + \left(\frac{q+p}{q}\right)^{n-2} b + \ldots$$
$$\ldots\ldots + \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 b + \left(\frac{q+p}{q}\right) b + b$$
$$= \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a + \left[b + \left(\frac{q+p}{q}\right) b + \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 b + \ldots\ldots + \left(\frac{q+p}{q}\right)^{n-1} b\right]$$

7. Nun ist letztere Reihe eine geometrische (§. 226.), wo das erste Glied $a = b$; der Exponent $m = \frac{q+p}{q}$, und n die Anzahl der Glieder angiebt, ferner $u = \left(\frac{q+p}{q}\right)^{n-1} b$, also $mu = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n b$, mithin die Summe (§. 221.)

$$\frac{mu-a}{m-1} = \left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^n b - b\right] : \left[\frac{q+p}{q} - 1\right]$$
$$= \left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^n b - b\right] : \frac{p}{q} = \frac{bq\left(\frac{q+p}{q}\right)^n - bq}{p}$$

Folg-

$$\text{f. } s = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a + b\,\frac{q\left(\frac{q+p}{q}\right)^n - bq}{p}$$

$$= \frac{ap\left(\frac{q+p}{q}\right)^n + bq\left(\frac{q+p}{q}\right)^n - bq}{p}$$

$$= \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (ap+bq) - bq}{p}$$

Beyspiel.

Ein Capital von 1000 Fl. ist zu 5 pro Cent aufgelegt, und wird nebst den Zinsen jährlich um 100 Fl. vermehret, wie groß wird die ganze Summe nach 25 Jahren?

Auflösung.

1. In gegenwärtiger Aufgabe ist $q : p = 100 : 5 = 20 : 1$, mithin $q = 20$; $p = 1$, $b = 100$: $a = 1000$, $n = 25$, und s wird aus der Formel §. 280 gesuchet, mithin ist

2. $s = (\frac{21}{20})^{25} \times (1000 + 2000) - 2000$

3. Nun ist log. $\frac{21}{20} = 0{,}0211893$ (§. 276. III. Zus.)

$$25 = 25$$

$$1059465$$
$$423786$$

$$\log.\ (\tfrac{21}{20})^{25} = 0{,}5297325$$
$$\log.\ 3000 = 3{,}4771213$$

$$\log.\ (\tfrac{21}{20})^{25} \times 3000 = 4{,}0068538 = \log.\ 10159{,}07$$

folg-

folglich

4. $s = 10159 - 2000 = 8159$ Fl.

Zusatz: Wenn von den 6 Stücken q, p, a, n, b, s fünf gegeben sind, so läßt sich aus der Formel jedes fehlende Glied finden, da man ferner die Interessen pro Cento rechnet, das ist, $q = 100$, und eben so p durch Landesgebrauch schon vorher bekannt ist, so giebt es noch 4 verschiedene Aufgaben, die sich aus dieser Formel auflösen.

§. 281.

Aufgaben zur Uebung.

I. Aufgabe: Unter eben den Bedingungen wie §. 280 aus q, p, a, n, s die Größe b bestimmen.

Auflösung:

$$\frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (ap + bq) - bq}{p} = s \text{ (§. 280.)}$$

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap + \left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq - bq = ps$$

$$b\left[\left(\frac{q+q}{q}\right)^n q - q\right] = ps - \left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap$$

$$b = \left[ps - \left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap\right] : \left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^n q - q\right]$$

II. Aufgabe:

Unter den nemlichen Bedingungen aus q, p, b, n, s. das Capital a finden.

Auflösung:

$$\frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (ap+bq) - bq}{p} = s$$

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap + \left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq - bq = ps$$

$$a = \left[ps + bq - \left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq\right] : \left(\frac{q+p}{q}\right)^n p$$

III. Aufgabe:

Unter eben den Bedingungen aus p, q, a, b, s die Anzahl der Jahre n angeben.

Auflösung:

$$\frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (pa+qb) - bq}{p} = s$$

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^n = \frac{ps+bq}{pa+bq}$$

$$n \log. \left(\frac{q+p}{q}\right) = \log. \left(\frac{ps+bq}{pa+bq}\right)$$

$$n = \log. \left(\frac{ps+bq}{pa+bq}\right) : \log. \left(\frac{q+p}{q}\right)$$

§. 282.

Lehrsatz:

Wenn das Capital a unter den Bedingungen §. 280 aufgelegt wird, wenn man hingegen, statt solches jährlich mit einer Summe zu vermehren, jedes Jahr b davon hinwegnimmt, so ist nach n Jahren der Rest

$$R = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (ap - bq) + bq}{p}$$

Beweis:

Man kann solchen entweder nach den nämlichen Gründen, in der nämlichen Ordnung, wie §. 280 führen, oder man kann die aufgestellte gegenwärtige Formel unmittelbar aus jener ableiten, indem man b negativ setzet, und statt s, R nimmt.

I. Zusatz: Aus dieser Formel, da man wieder $q = 100$ und eben so p als gegeben ansehen kann, lassen sich wieder vier verschiedene Aufgaben auflösen.

II. Zusatz: Wenn man §. 280 und §. 281 allenthalben b negativ, und $R = S$ setzet, so erhält man zur Auflösung dieser Aufgaben folgende vier Formeln:

1) $$R = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (pa - bq) + bq}{p}$$

2) $$b = \left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap - pR\right] : \left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^n q - q\right]$$

3) $$a = \left[pR + \left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq - bq\right] : \left(\frac{q+p}{q}\right)^n p$$

4) $n = \log.\left(\frac{pR-bq}{ap-pb}\right) : \log.\left(\frac{q+p}{q}\right)$

$= \log.\left(\frac{-(bq-pR)}{-(bq-ap)}\right) : \log.\left(\frac{q+p}{q}\right)$

$= \log.\left(\frac{bq-pR}{bq-ap}\right) : \log.\left(\frac{q+p}{q}\right)$

III. Zusatz: bezeichnet in diesen Formeln a den vermaligen Waldbestand, q : p das Verhältniß dieses Waldbestandes zum jährlichen Zuwachs, b den jährlichen Holzschlag, so giebt R den Waldbestand nach n Jahren, oder gleichen Holzschlägen, wo aber das Verhältniß q : p aus mehrjährigen Erfahrungen bestimmt werden muß.

§. 283.

Erklärung:

Wenn der Schuldner wegen dem entlehnten Capital a, welches nach dem Zinsfuß q : p verzinset werden muß, dem Gläubiger den jährlichen Ertrag b eines demselben ausgestellten Unterpfandes B so überläßt auf n Jahre, daß nach Verlauf derselben der bisher bezogene jährliche Ertrag am Capital a und den davon fälligen Zinsen abgerechnet werden soll, so heißt dieser Vertrag ein antichretischer Vertrag (pactum antichreticum).

I. Zusatz: Wenn der jährliche Ertrag b dem jährlichen Zinse $\frac{p}{q}a$ gleich ist, so muß der Schuldner jedesmal noch das ganze Capital heimzahlen, so wie er hingegen auch das ganze Unterpfand B zurückbekömmt; ist aber $b > \frac{p}{q}a$, so wird dadurch nicht nur der jährliche Zins, sondern auch ein Theil vom Capital abgeführt,

führt, mithin die Schuld vermindert; ist endlich $b < \frac{p}{q} a$, so reicht b zur Tilgung der Zinsen nicht zu, folglich wächst die Schuld immer.

II. Zusatz: Die Berechnung des Restes R, welche nach Verfluß von n Jahren der Gläubiger zu fordern hat, geschieht nach §. 282. Ergiebt sich nun für R ein negativer Werth, so muß denselben der Gläubiger an den Schuldner zurückbezahlen, weil er mehr empfangen hat, als sein Capital nebst den Zinsen beträgt.

III. Zusatz. Die Berechnung nimmt aber für b einen unveränderlichen Werth, ist also der jährliche Ertrag des Unterpfandes, wie z. B. bei einem Grundstück, veränderlich, so nimmt man aus mehrern Jahren das arithmetische Mittel für den jährlichen beständigen Ertrag an.

IV. Zusatz: Wenn z. B. dem Gläubiger wegen dem Capital von 10000 fl. zu 5 Procent, der jährliche Ertrag von 1000 fl. auf 10 Jahre überlassen wird, so ist

$a = 10000$, $b = 1000$ fl., $q = 100$, $b = 5$, $n = 10$,

mithin $R = \frac{(\frac{21}{20})^{10}(50000 - 100000) + 100000}{5}$

$= 20000 - 10000 \times (\frac{21}{20})^{10}$.

Nun ist log. $10000 \times (\frac{21}{20})^{10} = 4{,}2118930$ (§. 276. III. Zus.) $=$ log. 16288,9

folglich bekömmt der Gläubiger noch

$R = 20000 - 16288{,}9 = 3711$ fl. 6 kr.

§. 284.

Erklärungen:

Wenn ein Schuldner mit dem Gläubiger den Vertrag errichtet, daß er die empfangene Summe mit dem Zinse in einer bestimmten Zeit, und zwar jährlich zu gleichen Theilen abtragen soll, so nennt man

a. den Gläubiger den **Rentenirer**, und den Schuldner den **Entrepreneur**.

b. das ausgelegte Capital die **Mise**, und die davon jährlich zu entrichtende Summe, die **Rente**;

c. den Vertrag selbst einen **Rentenvertrag**, und zwar

α. einen **Jahr-Zeitrentenvertrag** oder **Annuitätenvertrag**, wenn die Zeit, in welcher die ganze Summe heimbezahlet werden soll, unmittelbar, d. i. in 20 oder 30 Jahren, u. s. w. angegeben ist;

β. einen **Leibrentenvertrag**, wenn diese Zeit mittelbar bestimmt ist, wenn nämlich die Rente so lange dauern soll, als der Rentenirer am Leben ist.

I. **Zusatz:** Die Annuitätenrechnung ist eine Anwendung der im 282. §. bestimmten Formeln, wo allemal durch a die Mise, durch b die jährliche stipulirte Rente, durch $\frac{p}{q}$ das Verhältnis des Capitals zum Zinse bezeichnet ist, und da nach verflossenem Zeittermine n das Capital sammt Zinsen heimbezahlt seyn muß, so ist allemal $R = o$.

II.

II. Zusatz: Bey Leibrenten geschieht die Berechnung nach den nämlichen Formularen, nur muß die Zeit n, das ist, die mittlere Lebensdauer des Rentenirers nach Mortalitätslisten bestimmt werden; je grösser nun die Anzahl der Renteniter ist, desto zuverlässigere Resultate erhält man aus diesen Listen im Allgemeinen für die Lebensdauer; nur muß man noch bedenken, daß eine solche Gesellschaft aus auserlesenen gesunden Leuten besteht.

§. 285.

I. Aufgabe:

Wie groß ist die jährlich zu beziehende Rente auf 30 Jahre von einem Kapital 6000 Fl. zu 5 pr. Cent.?

Auflösung:

1) Bey dieser Aufgabe ist $q : p = 100 : 5 = 20 : 1$, also $q = 20$; $p = 1$; $a = 6000$; $n = 30$, $R = 0$, und b wird gesucht.

2) Es ist aber §. 282. II. Zus.

$$b = \left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap - pR\right] : \left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^n q - q\right]$$

3) $\log. \left(\frac{q+p}{q}\right) = \log. \frac{21}{20} = 0{,}0211893$

$n = 30 = 30$

$\log. \left(\frac{q+p}{q}\right)^n = 0{,}6356790$

$= \log. 4{,}32194$, mithin

4) $\left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap - Rp = 4{,}32194 \times 6000$

5)

5) $\left(\frac{q+p}{q}\right)^n q - q = 4{,}32194 \times 20 - 20 = 66{,}4388$

6) Nun ist log. 4,32194 = 0,6356790
log. 6000 = 3,7781513
compl. dec. log. 66,4388 = 8,1775782—10

log. b = 2,5914085 = log. 390,31

Mithin ist

7) die zu beziehende Rente 390 Fl. 18 Kr. 2 Pf.

II. Aufgabe:

Wie groß muß die zu 5 pro Cent. angelegte Mise seyn, wenn sie 20 Jahre eine jährliche Rente von 400 Fl. ertragen soll?

Auflösung:

1) In dieser Aufgabe ist wieder q = 20, p = 1, b = 400, n = 20, R = 0, und man sucht a.

2) Nun ist $a = \left\{pR + \left(\frac{p+p}{q}\right)^n bq - bq\right\} : \left(\frac{q+p}{q}\right)^n p$

3) $\log. \left(\frac{q+p}{q}\right)^{20} = 20 \times 0{,}0211893 = 0{,}4237860$
$= 2{,}6533$

4) $\left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq - bq = 2{,}6533 \times 8000 - 8000$
$= 13226{,}4$

5) log. 13226,4 = 4,1214416
$\log. \left(\frac{21}{20}\right)^{20}$ = 0,4237860

log. a = 3,6976556 = log. 4984,9

Folglich muß

6) das zuerlegende Capital oder Mise 4984 Fl. 54 Kr. seyn.

III.

III. Aufgabe:

Wenn vom Capital 100000 Fl. zu 5 pr. Cent. jährlich 6000 Fl. Renten fließen, auf wie viele Jahre erstrecket sich dieser Genuß.

Auflösung:

1. In diesem Falle ist wieder $q = 20$, $p = 1$, $a = 100000$, $b = 6000$, $R = 0$, und n wird gesucht.

2. Nun ist §. 282. II. Zus. 4.

$$n = \log.\left(\frac{bq - pR}{bq - ap}\right) : \log.\left(\frac{q + p}{q}\right)$$

3. $$\frac{bq - pR}{bq - ap} = \frac{120000}{120000 - 100000} = \frac{120000}{20000} = 6$$

$$\log.\left(\frac{bp - pR}{bq - ab}\right) = \log. 6 = 0{,}7781513$$

4. $$\log.\left(\frac{q + p}{q}\right) = \log.\left(\frac{21}{20}\right) = 0{,}0211893,$$ mithin

5. $$n = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893} = 36{,}723,$$ d. i.

Die Renten fließen 36 Jahre, 8 Monathe, 20 Tage.

§. 286.

Erklärungen:

Errichtet eine Gesellschaft einen Vertrag, daß jedes Mitglied ein gewisses Capital erlegen will, von derer Summe den Mitgliedern jährlich bis zum Tode des letzten Mitgliedes immer eine gleiche Rente ausgezahlet, und daß solche unter die überlebenden vertheilet werden soll, so heißt

a. dieser Vertrag eine Tontine,

b. Die Mitglieder, die das Kapital erlegen, Tontiniſten,

c.

c. jene Person oder Gesellschaft, welche für die empfangene Summe jährlich die Renten auszahlet, der **Tontinicarius.**

Anmerkung: Die Tontine hat den Namen vom Lorenz Tonti, einem Neapolitaner, der zuerst den Plan davon ungefähr ums Jahr 1663 im Dienste Frankreichs entwarf, wo sie auch im Jahre 1689 zu Stande kam.

Zusatz: Die Berechnung bey Tontinen ist jener von Leibrenten ähnlich, und ist ebenfalls eine Anwendung von den Formeln §. 282. II. Zus.

§. 287.

Erklärung:

Der Abzug, welchen die Gesetze einem Schuldner, der jetzt zahlet, was er erst nach einer gewissen Zeit zu zahlen schuldig ist, bewilligen, heißt der **Rabatt**, oder **Interusurium**, und dessen Berechnung die **Rabatt-** oder **Interusuriums-Rechnung.**

I. **Zusatz:** Weder der Schuldner kann zur frühern Bezahlung mit Abzug des treffenden Rabattes gezwungen, und eben so wenig der Gläubiger zur Annahme dieser Bezahlung angehalten werden, sondern es wird allemal beyderseitige freye Einwilligung erfordert.

II. **Zusatz.** Nach dem rechtlichen Princip darf der Rabatt weder den Gläubiger, noch den Schuldner bevortheilen; man nimmt also an, die auf der Stelle erlegte Summe müsse so groß seyn, daß der Gläubiger durch sie nach landesüblichen Zinsen bis zum Zahlungstermin so viel erhält, als er zu fordern hat, und daß auf

der

der andern Seite der Rabatt nach eben den Zinsen dem Schuldner eben so viel abwirft, als er durch den Gebrauch des Capitals bis zum Zahlungstermin erhalten würde.

§. 288.

Lehrsatz:

Wenn der Schuldner das Capital a nach n Jahren zu zahlen, und indessen nach dem Zinsfuß q : r zu verzinsen hat, und nach landesüblichen Zinsen von q, p genommen wird, so ist die auf der Stelle zu entrichtende Summe, oder

$$S = \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^n a$$

Beweis:

1) Die zu entrichtende Summe S wirft dem Gläubiger nach n Jahren mit den landesüblichen Zinsen q : p die Summe

$$A = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n S \text{ ab} \quad (\S. 277.)$$

2) Da nun der Gläubiger n Jahre das Interesse vom Capital a nach dem Zinsfuße q : r zu fordern hat, so beträgt die ganze Summe am Zahlungstermin, oder nach n Jahren

$$B = \left(\frac{q+r}{q}\right)^n a$$

3) Da endlich nach dem rechtlichen Princip (§. 287. II. Zus.) A = B seyn muß, also

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^n S = \left(\frac{q+r}{q}\right)^n a, \text{ so ist}$$

4)

4) $S = \left(\frac{q+r}{q}\right)^n a : \left(\frac{q+p}{q}\right)^n = \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^n a$

I. Zusatz: Bezeichnet R den treffenden Rabatt, so ist $R = a - S$

II. Zusatz: Wenn z. B. der Gläubiger nach 10 Jahren 1000 fl. zu entrichten, indessen aber solche jährlich mit 3 pCt. zu verzinsen hat, und 5 pCt. die landesüblichen Zinsen sind, so ist die Summe, die er nach Abzug des Rabattes auf der Stelle zu erlegen hat,

oder $S = \left(\frac{103}{105}\right)^{10} \times 1000$

Nun ist log. 103 = 3,0128372—1 (§. 245.)
log. 105 = 2,0211893

log. $\left(\frac{103}{105}\right)^{10}$ = 9,9164790—10
log. 1000 = 3,0000000

log. S = 2,9164790 mithin
S = 825,0476 fl. = 825 fl. 2 kr. 3 pf.
und der Rabatt R = 174 fl. 57 kr. 1 pf.

III. Zusatz: Wenn der Schuldner jährlich das Capital nach landesüblichen Zinsen verinteressiren muß, so ist $r = p$; mithin $S = a$, oder der Schuldner muß das ganze Capital erlegen; wäre hingegen $r > p$, so müßte er mehr als solches bezahlen, welches doch selten, oder nie der Fall seyn wird.

IV. Zusatz: Hat der Schuldner das Capital bis zum Zahlungstermin unverzinslich zu genießen, so ist $r = o$, mithin $S = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a$

in

in dieſem Falle würde im obigen Beyſpiele

$S = (\frac{20}{21})^{10} \cdot 1000.$

Nun iſt log. $\frac{20}{21} = 0{,}9788107 - 1$ (§. 276. III. Zuſ.)

mithin log. $(\frac{20}{21})^{10} \cdot 1000 = 12{,}7881070 - 10$, alſo

log. $S = 2{,}7881070$

$= \log. 613{,}913$, alſo

$S = 613$ fl. 54 kr. 3 pf.

$R = 386$ fl. 5 kr. 1 pf.

Anmerkung: Unter der Bedingung des vorhergehenden Zuſatzes, d. i. für $r = 0$, läßt ſich auch die Formel $S = \left(\frac{q}{q+p}\right)^n a$ auf folgende Art beweiſen:

1) Man nehme indeſſen an, die Zahlung geſchehe um 1 Jahr früher, ſo iſt nach landesüblichen Zinſen das jährliche Intereſſe $= \frac{p}{q} a$, d. i., allemal $\frac{p}{q}$ vom Capital.

2) Bezahlet alſo der Schuldner auf der Stelle das Capital a, welches er erſt nach einem Jahre zu zahlen ſchuldig iſt, ſo kann er davon am Ende des Jahres $\frac{p}{q} a$ Zinſen vom Gläubiger fodern, weil er ſolche bey Zurückbehaltung von a hätte erhalten können.

3) Zieht er aber auf der Stelle vom Capital dieſe Summe ab, d. i. bezahlt er nur $a - \frac{p}{q} a$, ſo nimmt er etwas, wozu er erſt nach einem Jahre berechtiget iſt, und von dem alſo der Gläubiger den Zins $\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} a = \frac{p^2}{q^2} a$ N° 1. nach einem Jahre fodern kann.

4)

4) Entrichtet nun der Schuldner solchen auf der Stelle, d. i. erlegt er $a - \frac{p}{q} a + \frac{p^2}{q^2} a$, so zieht wieder der Gläubiger einen Zins, auf den er erst nach einem Jahre ein Recht hat, mithin muß er wieder davon den Zins $\frac{p}{q} \cdot \frac{p^2}{q^2} a = \frac{p^3}{q^3} a$ bezahlen, also bekömmt er, wenn solches auf der Stelle abgezogen wird

$$a - \frac{p}{q} a + \frac{p^2}{q^2} a - \frac{p^3}{q^3} a$$

5) Auf diese Art lassen diese Schlüsse immer fortsetzen, mithin läßt sich die Summe, welche auf der Stelle entrichtet werden muß, durch nachstehende unendliche Reihe darstellen.

$$S = a - \frac{p}{q} a + \frac{p^2}{q^2} a - \frac{p^3}{q^3} a + \frac{p^4}{q^4} a - \ldots.$$

$$= a - a\left(\frac{p}{q} - \frac{p^2}{q^2} + \frac{p^3}{q^3} - \frac{p^4}{q^4} + \ldots.\right)$$

6) Da nun $\frac{p}{q}$ ein ächter Bruch, und zugleich der Exponent der in den Klammern enthaltenen geometrischen Reihe ist, so wird (§. 224.)

$$S = a - a\left(\frac{p}{q+p}\right) = \frac{aq+ap-ap}{q+p} = \frac{q}{q+p} a.$$

§. 289.

Lehrsatz: Wenn ein Schuldner, der das Capital a in n gleichen Fristen, jede $= b$, und zwar die erste nach $m+t$ Jahren, und die folgenden allemal nach t Zeit zu bezahlen, und indessen nach dem Verhältniß $q : r$

zu

zu verzinsen hat, sich mit dem Gläubiger auf der Stelle abfinden will, so ist, wenn ferner q : p das landesübliche Zinsverhältniß bezeichnet, die zu erlegende Summe, oder

$$S = \frac{\left((q+p)^{nt} - (q+r)^{nt}\right)}{\left((q+p)^{t} - (q+r)^{t}\right)} \cdot \frac{(q+r)^{m+t}}{(q+p)^{m+nt}}\, b$$

Beweis:

1) Vermöge den festgesetzten Bedingungen sollte der Schuldner das Capital a nach dem Zinsfuße q : r anfänglich m + t Jahre verzinsen, und am Ende derselben die erste Frist b erlegen; nun muß er wieder bis zur nächsten Fristzeit t den Ueberrest a — b verzinsen, und am Ende die zweyte Frist b entrichten u. s. f. bis er nach m + nt Jahren die ganze Schuld getilget hat.

2) Dieses ist nun eben soviel, als der Schuldner muß die erste Frist m + t Jahre, die zweyte m + 2t, die dritte m + 3t u. s. f. und die letzte m + nt Jahre verzinsen, und dann jedesmal solche erlegen: will sich also

3) der Schuldner mit dem Gläubiger auf der Stelle abfinden, so muß er bey dem landesüblichen Zinsverhältniß q : p auf der Stelle bezahlen, nach §. 288.

für die erste Frist $A = \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{m+t} b$

für die zweyte $B = \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{m+2t} b$

für

für die dritte Frist $C = \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{m+nt} b$ u. s. f.

für die letzte $N = \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{m+nt} b$

4) Folglich ist die ganze zu erlegende Summe, oder

$$S = b\left[\left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{m+t} + \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{m+2t} + \ldots + \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{m+nt}\right]$$

5) Da nun die in Klammern eingeschlossene Reihe eine geometrische ist, wovon das erste Glied

$= \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{m+t}$, das letzte $= \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{m+nt}$, und der Exponent $= \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{t}$; so ist nach §. 221. I. Zus.

6) $a - mu = \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{m+t} - \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{m+nt+t}$

$$= \frac{(q+p)^{nt}\,(q+r)^{m+t} - (q+r)^{m+nt+t}}{(q+p)^{m+nt+t}}$$

$$= \frac{(q+r)^{m+t}\left[(q+p)^{nt} - (q+r)^{nt}\right]}{(q+p)^{m+nt+t}}$$

7) $1 - m = 1 - \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{t} = \frac{(q+p)^{t} - (q+r)^{t}}{(q+p)^{t}}$, also

8)

8) $S = b\left\{\frac{(q+r)^{m+t}\left[(q+p)^{nt}-(q+r)^{nt}\right]}{(q+p)^{m+nt+t}}\right.$

$\left.\times\frac{(q+p)^{t}}{(q+p)^{t}-(q+r)^{t}}\right\} = b\,\frac{(q+r)^{m+t}\left[(q+p)^{nt}-(q+r)^{nt}\right]}{(q+p)^{m+nt}\left[(q+p)^{t}-(q+r)^{t}\right]}$

I. Zusatz: Muß der Schuldner jedes Jahr die Frist b, und zwar die erste nach einem Jahre, entrichten, so wird $t = 1$, und $m = 0$, mithin

$$S = \frac{\left[(q+p)^{n}-(q+r)^{n}\right](q+r)}{\left[(q+p)-(q+r)\right](q+p)^{n}}\,b$$

II. Zusatz: Hat bey den ebengesetzten Bedingungen der Schuldner noch überdieß das Capital unverzinslich zu genießen, so ist auch $r = 0$, also

$$S = \frac{\left[(q+p)^{n}-q^{n}\right]q}{p(q+p)^{n}}\,b = \frac{q\,(q+p)^{n}-q^{m+1}}{p\,(p+q)^{n}}\,b$$

$$= \left(\frac{q}{p} - \frac{q^{n+1}}{p(q+p)^{n}}\right)b$$

III. Zusatz: Der Schuldner habe z. B. das Capital 1000 fl. in zehn gleichen jährlichen Fristen unverzinslich zu entrichten, so daß die erste Frist nach dem ersten Jahre anfängt, so ist $a = 1000$; $n = 10$, $m = r = 0$; $t = 1$; $b = 100$; mithin bey 5 pr. Ct. landesüblichen Zinsen, oder für $q = 100$: $p = 5$, ist

$\frac{q}{p} = 20$; ferner

log.

$$\log.\ (q+p)^{n} = \log.\ 105^{10} = 20{,}2118930$$
$$\log.\ p = \log.\ 5 = 0{,}6989790$$

$$\log.\ [p(q+p)^{n}] = = 20{,}9108630$$
$$\log.\ q^{n+1} = \log.\ 100^{11} = 22{,}0000000$$

$$\log.\ \frac{q^{n+1}}{p(q+p)^{n}} = 1{,}0891370$$
$$= \log.12{,}2782, \text{ mithin}$$

$S = (20 - 12{,}2782) \times 100 = 772{,}18$ fl.
$= 772$ fl. 10 kr. 3 pf.

§. 290.

Lehrsatz:

Wenn alles wie im vorhergehenden § bleibt, Gläubiger und Schuldner aber dahin übereinkommen, daß letzterer das Ganze mit einmal abtragen, indessen aber verzinsen soll, und $m+z$ die Zeit bezeichnet, wo diese Zahlung geschehen muß, so ist

$$\left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{z} = \frac{\left(\left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt}\left(\left(\frac{q+r}{q}\right)^{t}-\left(\frac{q+r}{q}\right)^{(n+1)t}\right)\right) b}{\left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt}\left(\left(\frac{q+p}{q}\right)^{t}-\left(\frac{q+r}{q}\right)^{t}\right) a}$$

Beweis:

1) Offenbar müssen Schuldner und Gläubiger bey diesem Vertrag jeder soviel erhalten, als jeder vorher zu fodern hatte, mithin muß

2)

2) der Gläubiger am Ende des m + zten Jahres so eine Summe erhalten, daß solche bis am Schlusse des letzten Termins, oder in nt — z Jahren sammt Zins und Zinseszinsen soviel im landesüblichen Zinsfuße abwirft, als er in einzelnen Fristen, nebst den treffenden Zinsen erhalten hätte.

3) Betrachtet man wieder die ganze Schuld als Aggregat der einzelnen Fristen, wie §. 289 N° 1 und 2, so würde der Gläubiger bey der ersten Frist, oder nach dem m + t ten Jahre $A = \left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+t} b$ (§. 277). erhalten, und diese Summe würde ihm bis zum Schlusse oder letzten Termin, das ist in (n — 1)t Jahren mit Zinseszinsen abwerfen:

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^{(n-1)t} A = \left(\frac{q+p}{q}\right)^{(n-1)t} \left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+t} b$$

4) Aus eben diesen Gründen bekömmt er durch die zweite Frist $B = \left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+2t} b$, und dadurch am Ende

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^{(n-2)t} B = \left(\frac{q+p}{q}\right)^{(n-2)t} \left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+2t} b$$

5) Die dritte Frist $C = \left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+3t} b$, und am Ende

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^{(n-3)t} C = \left(\frac{q+p}{q}\right)^{(n-3)t} \left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+3t} b$$ u. so fort.

6) Die vorletzte Frist $M = \left(\frac{q+r}{q}\right)^{(m+(n-1))t} b$, am Ende

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^{t} M = \frac{q+p}{q}\left(\frac{q+r}{q}\right)^{(m+(n-1))t} b$$

7) Die letzte Frist $N = \left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+nt} b$, also am Ende

da nun $(n-n)t = o$ ist, so wird

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^{o} N = N = \left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+nt} b$$

8) Durch die fristenweise Bezahlung würde also der Gläubiger sammt Zinseszinsen erhalten:

$$S = b\left(\left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+nt} + \left(\frac{q+p}{q}\right)^{t}\left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+(n-1)t} + \ldots\ldots + \left(\frac{q+p}{q}\right)^{(n-1)t}\left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+t}\right)$$

9) Nun ist diese Reihe eine geometrische, wo

$$a = \left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+nt}; z = \left(\frac{q+p}{q}\right)^{(n-1)t}\left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+t}$$

und $m = \left(\frac{q+p}{q}\right)^{t} : \left(\frac{q+r}{q}\right)^{t} = \left(\frac{q+p}{q+r}\right)^{t}$

mithin §. 221.

10) $mz - a = \left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt} \cdot \left(\frac{q+r}{q}\right)^{m} - \left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+nt}$

$$= \left(\frac{q+r}{q}\right)^{m}\left(\left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt} - \left(\frac{q+r}{q}\right)^{nt}\right)$$

$$m - 1 = \left(\frac{q+p}{q+r}\right)^{t} - 1 = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^{t} - \left(\frac{q+r}{q}\right)^{t}}{\left(\frac{q+r}{q}\right)^{t}}; \text{ folglich}$$

m

$$\frac{mu-a}{m-1} = \frac{\left(\frac{q+r}{q}\right)^{m}\left(\left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt}-\left(\frac{q+r}{q}\right)^{nt}\right)(q+r)^{t}}{(q+p)^{t}-(q+r)^{t}}$$

11) $$S = b\frac{\left(\frac{q+r}{q}\right)^{m}\left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt}-\left(\frac{p+r}{q}\right)^{nt}\right]\left(\frac{q+r}{q}\right)^{t}}{\left(\frac{q+p}{q}\right)^{t}-\left(\frac{q+r}{q}\right)^{t}}$$ (§. 74. VII. Zus.)

12) Am Zahlungstermin $m+z$ erhält nun der Gläubiger durch den neuen Vertrag das ganze Capital mit Zinseszinsen, oder $\left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+z} a$, und dieses beträgt in der noch übrigen Zeit $nt-z$ nebst Zinseszinsen.

$$P = \left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt-z}\left(\frac{q+r}{q}\right)^{m+z} a$$

$$= \left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt}\cdot\left(\frac{q}{q+p}\right)^{z}\cdot\left(\frac{q+r}{q}\right)^{m}\cdot\left(\frac{q+r}{q}\right)^{z} a$$

$$= \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{z}\cdot\left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt}\cdot\left(\frac{q+r}{q}\right)^{m} a$$

13) Da endlich $P=S$ seyn muß (N° 2), so ist

$$\left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{z}\cdot\left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt}\cdot\left(\frac{q+r}{q}\right)^{m} a$$

$$= b\frac{\left(\frac{q+r}{q}\right)^{m}\left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt}\cdot\left(\frac{q+r}{q}\right)^{t}-\left(\frac{q+r}{q}\right)^{(n+1)t}\right]}{\left(\frac{q+p}{q}\right)^{t}-\left(\frac{q+p}{q}\right)^{t}}$$

folglich

$$14)\quad \left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{z} = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt}\cdot\left(\frac{q+r}{q}\right)^{t} - \left(\frac{q+r}{q}\right)^{(n+1)t}}{\left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt}\left\{\left(\frac{q+p}{q}\right)^{t} - \left(\frac{q+r}{q}\right)^{t}\right\}}\,\frac{b}{a}$$

I. Zuſatz: Setzet man der Kürze wegen N° 14

$$\frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt}\left(\frac{q+r}{q}\right)^{t} - \left(\frac{q+r}{q}\right)^{(n+1)t}}{\left(\frac{q+p}{q}\right)^{nt}\left\{\left(\frac{q+p}{q}\right)^{t} - \left(\frac{q+r}{q}\right)^{t}\right\}}\,\frac{b}{a} = Q,\ \text{alſo}$$

$$\left(\frac{q+r}{q+p}\right)^{z} = Q;\ \text{mithin}\ z\ \log.\ \frac{q+r}{q+p} = \log.\ Q$$

ſo iſt $z = \log. Q : \log. \frac{q+r}{q+p}$

alſo auch $m + z$, oder die geſuchte Zeit, (man nennt ſie den mittlern Zahlungstermin), gefunden.

II. Zuſatz: Genießet der Schuldner das Capital unverzinslich, und ſind die Friſten jährlich, ſo iſt $r = o$, $t = 1$, alſo

$$Q = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^{n} - 1}{\left(\frac{q+p}{q}\right)^{n}\left\{\frac{q+p}{q} - 1\right\}}\,\frac{b}{a};\ \text{und}$$

$$z = \log. Q : \log. \frac{q}{q+p}$$

III. Zuſatz: Soll der Schuldner unverzinslich das Capital von 1000 fl. in 10 gleichen jährlichen Friſten ab-

abzahlen, so ist für 5. pr. C. landesüblichen Zinsen, $q = 100$; $p = 5$; $m = 0 = 1$; $n = 10$; $t = 1$; $b = 100$, und $a = 1000$, also

$$Q = \frac{[(\frac{21}{20})^{10} - 1]\ 100}{(\frac{21}{20})^{10}(\frac{21}{20}) - 1).\ 1000}$$

Nun ist $\log. (\frac{21}{20})^{10} = 0,2118930 = \log. 1,6289$, also $[(\frac{21}{20})^{10} - 1].\ 100 = 62,89$; $\log. [(\frac{21}{20})^{10} - 1].\ 100 = 1,7985816$

Ferner $\frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20}$

$\log. \frac{1}{20} = 0,6989700 - 2$

$\log. (\frac{21}{20})^{10} = 0,2118930$

$\log. 1000 = 3,0000000$, also

$\log. (\frac{21}{20})^{10}(\frac{1}{20}).\ 1000 = 1,9108630$; und

$\log. Q = 1,7985816 - 1,9108630 = -0,1122814$

Ferner:

$\log. \frac{q}{q+p} = \log. \frac{20}{21} = 0,9788107 - 1 = -0,0211893$

mithin $z = \frac{-0,1122814}{-0,0211893} = \frac{1122814}{211893} = 5,299$ Jahre

D. i. der mittlere Zahlungstermin fällt nach 5 Jahren 3 Monath. 17 Tagen, wo das ganze Capital $a = 1000$ fl. mit einmal erlegt werden muß.

§. 291.

Lehrsatz:

Wenn der Schuldner das Capital a unter den Bedingungen des 289. §. zahlen muß, nun aber mit dem Gläubiger darin übereinkömmt, daß er die Schuld in r gleichen Terminen abführen, und indessen im Zinsfuße

fuße $q : r$ verzinsen soll, $\tau\mu$ Jahren die Zahlung anfängt, so ist der Betrag für jeden Termin oder

$$\beta = \frac{[(q+p)^{\tau} - (q+r)^{\tau}]\,(q+p)^{\mu+\nu\tau}}{[(q+p)^{t} - (q+r)^{t}]\,(q+p)^{m+nt}} \cdot \times$$

$$\frac{[(q+p)^{nt} - (q+r)^{nt}]\,(q+r)^{m+t}}{[(q+p)^{\nu\tau} - (q+r)^{\nu\tau}]\,(q+r)^{\mu+\tau}}\, b$$

Beweis:

1) Wollte der Schuldner auf der Stelle bezahlen, so wäre die zu erlegende Summe nach §. 289

$$S = \frac{[(q+p)^{nt} - (p+r)^{nt}]\,(q+r)^{m+t}}{[(q+p)^{t} - (q+r)^{t}]\,(q+p)^{m+nt}}\, b$$

2) Bey den neuen veränderten Zahlungsterminen, wenn β die bey jeder Frist zu erlegende Summe bezeichnet, müßte er aus eben den Gründen auf der Stelle erlegen

$$T = \frac{[(q+p)^{\nu\tau} - (q+r)^{\nu\tau}]\,(q+p)^{\mu+\tau}}{[(q+p)^{\tau} - (q+r)^{\tau}]\,(q+p)^{\mu+\nu\tau}}\, \beta$$

3) Nun muß offenbar $S = T$ seyn, weil sonst durch den neuen Vertrag entweder der Schuldner, oder der Gläubiger übervortheilt würde, also

4) $$\beta = \frac{[(q+p)^{\tau} - (q+r)^{\tau}]\,(q+p)^{\mu+\nu\tau}}{[(q+p)^{t} - (q+r)^{t}]\,(q+p)^{m+nt}} \cdot \times$$

$[(q+p)$

$$\frac{[(q+p)^{nt} - (q+r)^{nt}]\,(q+r)^{m+\epsilon}}{[(q+p)^{\nu\tau} - (q+r)^{\nu\tau}]\,(q+r)^{\mu+\tau}}\,b$$

I. Zusatz: Die im Lehrsatze gegebene Auflösung heißt die Berechnung von veränderten Zahlungsterminen.

II. Zusatz: Sollten bey den veränderten Zahlungsterminen keine Zinsen bezahlt, sondern die Fristen β dadurch vergrössert werden, so behält zwar r in N° 1 seinen Werth, aber in N° 2 muß solches $= o$ gesetzt werden, folglich wird nun

$$\beta = \frac{[(q+p)^{\tau} - q^{\tau}]}{[(q+p) - (q+r)]}\,\frac{(q+p)^{\mu+\nu\tau}}{(q+p)^{m+nt}} \cdot \times$$

$$\frac{[(q+p)^{nt} - (q+r)^{nt}]\,(q+r)^{m+\epsilon}}{[(q+p)^{\nu\tau} - q^{\nu\tau}]\,(q)^{\mu+\tau}}\,b$$

III. Zusatz: Würde der Schuldner das Capital unverzinslich zu geniessen haben, so ist allemal $r = o$; setzet man ferner, daß der Schuldner sogleich nach dem ersten Jahre, und so jährlich die Frist b zu erlegen habe, so ist $m = o$, und $t = 1$; soll nun bey dem neuen Vertrag die erste Frist β ebenfalls nach τ Jahren bezahlt werden, so ist auch $\mu = o$, folglich unter diesen Bedingungen

$$\beta = \frac{[(q+p)^{\tau} - q^{\tau}]\,(q+p)^{\nu\tau}\,[(q+p)^{n} - q^{n}]^{\nu}}{[(q+p) - q]\,(q+p)^{n} \cdot [(q+p)^{\nu\tau} - q^{\nu\tau}]^{\tau}}\,b$$

$$= \frac{\left[\left\{\frac{q+p}{q}\right\}^{\tau} - 1\right] q^{\tau}\left\{q+p\right\}^{\nu\tau}\left[\left\{\frac{q+p}{q}\right\}^{n} - 1\right] q^{n+1}}{p\left\{q+p\right\}^{n}\left[\left\{\frac{q+p}{q}\right\}^{\nu\tau} - 1\right] q^{\nu\tau+\tau}} \; b$$

(§. 74. VII. Zuſ.)

$$= \frac{\left[\left\{\frac{q+p}{q}\right\}^{\tau} - 1\right]\left\{q+p\right\}^{\nu\tau-n}\left[\left\{\frac{q+p}{q}\right\}^{n} - 1\right]}{p\left[\left\{\frac{q+p}{q}\right\}^{\nu\tau} - 1\right] q^{\nu\tau-(n+1)}} \; b$$

IV. Zuſatz: Der Schuldner habe das Capital von 1000 fl. in 10 gleichen jährlichen Friſten unverzinslich zu entrichten, und zwar nach einem Jahre die erſte Friſt; nun vergleicht er ſich mit dem Gläubiger ſeine Schuld in 10 gleichen Theilen, aber zweyjährigen Friſten abzutragen, ſo daß nach zwey Jahren die Zahlung anfängt, ſo iſt $a = 1000$; $b = 100$, $m = \mu = 0$, $\tau = 2$, $t = 1$, $n = \nu = 10$; $r = 0$; ferner bey 5 pr. Ct. landesüblichen Zinſen $q = 100$, $p = 5$, mithin

$$\log.\left\{\frac{q+p}{q}\right\}^{\tau} = \log.\left\{\frac{21}{20}\right\}^{2} = 2 \times 0{,}0211893$$

$$= 0{,}0423786 = \log. 1{,}1025$$

alſo $\left\{\frac{21}{20}\right\}^{2} - 1 = 0{,}1025$;

$$\log.\left\{\frac{q+p}{q}\right\}^{n} = \log.\left\{\frac{21}{20}\right\}^{10} = 0{,}2118939 = \log. 1{,}628894$$

alſo

also $\left\{\frac{q+p}{q}\right\}^{n} - 1 = 0{,}628894$; mithin

$\log.\left[\left\{\frac{q+p}{q}\right\}^{\tau} - 1\right] = \log. 0{,}1025 = 0{,}0107239 - 1$

$\log. (q+p)^{y\tau-n} = \log. 105^{10} = 20{,}2118930$

$\log.\left[\left\{\frac{q+p}{q}\right\}^{n} - 1\right] = \log. 0{,}628894 = 0{,}7985775 - 1$

$\log. b = \log. 100 = 2{,}0000000$

Logarithm. des Zählers $= 21{,}0211944$

Eben so

$\log.\left\{\frac{q+p}{q}\right\}^{y\tau} = \log.\left\{\frac{21}{20}\right\}^{20} = 20 \times 0{,}0211893$

$= 0{,}4237860 = \log. 2{,}6533$

also $\left\{\frac{21}{20}\right\}^{20} - 1 = 1{,}6533$

Ferner $\log.\left[\left\{\frac{q-p}{q}\right\}^{y\tau} - 1\right] = \log. 1{,}6533 = 0{,}2183517$

$\log. p = \log. 3 = 0{,}6989700$

$\log. q^{y\tau-(n+1)} = \log. 100^{9} = 18{,}0000000$

Logarithm. des Nenners $= 18{,}9173217$

Endlich $21{,}0211944$

$- \quad 18{,}9173217$

$\log. p = 2{,}1038727 = \log. 127{,}2$

folglich muß der Schuldner bey jeder zweyjährigen Frist 127 fl. 12 kr. erlegen.

VIII.

VIII. Hauptstück.

Infinitesimalrechnung.

I. Abschnitt.

Vom Begriffe und den Grundsätzen der Infinitesimalrechnung.

§. 292.

Grundsatz;

Jede Veränderung einer Größe geschieht nach dem Gesetze der Stättigkeit, d. i. wenn man einer veränderlichen Größe nach einander zwey verschiedene Werthe beyleget, so läßt sich immer ein Zwischenwerth angeben, der ihr zukömmt, ehe sie vom ersten zum zweyten Werthe gelanget.

§. 293.

Erklärungen:

a. Größen, die in dem Ausdrucke einer Aufgabe, oder eines Satzes, selbst vorkommen, oder Functionen solcher Größen sind, heißen nothwendige oder Hauptgrößen; — die man hingegen beliebig annimmt, um die verwickelten Verhältnisse der Hauptgrößen leichter einzusehen, heißen zufällige, willkührliche, Neben- oder Hülfsgrößen.

b. Wenn man zu einer veränderlichen Größe x eine Hilfsgröße x′ so annimmt, daß sie sich der Haupt-

größe

größe x nach Belieben nähern, und ihr selbst gleich werden kann, so heißt sie die correspondirende Hilfsgröße, oder überhaupt die Hilfsgröße von x, und x die Hauptgröße von x'. Um dieses Verhältniß einer Hilfsgröße zur Hauptgröße auszudrücken, giebt man solcher mit der Hauptgröße einerley Buchstaben, setzet ihr aber ein Zeichen bey; so z. B. sind x', x'' Hilfsgrößen von x, und y', y'' von y, und so weiter.

Zusatz: Hilfsgrößen sind veränderliche Größen; aber nicht umgekehrt, indem eine veränderliche Größe eine Hauptgröße seyn kann.

§. 294.

Erklärungen:

a. Gränze eines Dinges ist, wo es aufhört.

b. Gränze einer veränderlichen Größe ist jener Werth, dem sie sich immer nähert, und wenn sie solchen erreicht hat, ihre Zu- oder Abnahme vollendet ist, mithin die veränderliche Größe als solche aufhöret. Dieser Werth heißt auch in sofern der letzte Werth der veränderlichen Größe, als er in der That unter den Werthen, die dieser Größe auf jeder Stuffe bey ihrer Annäherung zur Gränze (§. 292.) zukommen, der letzte ist.

c. Das Verhältniß zweyer veränderlicher Größen an ihren Gränzen heißt aus eben dem Grunde das letzte Verhältniß oder Gränzverhältniß.

I. Zusatz: Hauptgrößen, selbst, wenn sie veränderliche Größen sind, haben keine eigentlichen Gränzen. Denn es giebt keinen Werth, dem sie sich annähern, sondern

solcher

solcher ist allemal, sobald die Aufgabe vollkommen bestimmt ist, gegeben (§. 167. III. Zus.)

II. Zusatz: Die Hauptgröße ist allemal die Gränze ihrer Hilfsgröße; denn da sich letztere der erstern allmählig immer nähern kann, so hört sie auf, Hilfsgröße zu seyn, sobald sie die Hauptgröße erreicht hat, mithin ist die Hauptgröße ihre Gränze, oder letzter Werth.

III. Zusatz: Das letzte Verhältniß einer Hilfsgröße zu ihrer Hauptgröße z. B. $x' : x$ ist ein Verhältniß der Gleichheit; denn wenn $x' - x = 0$, mithin x' die Gränze erreicht hat, so ist $x' = x$, mithin $x' : x = 1 : 1$.

IV. Zusatz: Das letzte Verhältniß zweyer Hilfsgrößen x'', x', die eine gemeinschaftliche Gränze x haben, ist ein Verhältniß der Gleichheit; denn wenn von x'' sowohl, als x', die Hauptgröße x die Gränze ist, mithin $x'' - x = 0$, $x' - x = 0$; so ist $x'' : x' = x : x = 1 : 1$ das letzte Verhältniß.

V. Zusatz: Das letzte Verhältniß zweyer verschiedener Hilfsgrößen x', y' ist das Verhältniß ihrer Hauptgrößen x, y; denn da $x' - x = 0$; und $y' - y = 0$ wird, wenn x' und y' an der Gränze sind, so ist ihr letztes Verhältnis $x' : y' = x : y$.

§. 295.

Erklärungen:

a. Unendlich ist, was keine Gränzen hat.

b. Eine Größe, die einer unendlichen Abnahme fähig ist, also 0 zur Gränze, oder was einerley ist, deren Abnahme keine Gränzen hat, heißt dieser Fähigkeit wegen unendlich klein (infinite parvum potentia), und wenn man sie an ihrer Gränze annimmt,

nimmt, eine verschwindende Größe, welche man entweder durch $\frac{1}{\infty}$ oder auch mit o bezeichnet.

c. Eine Größe, in wiefern sie einer unendlichen Zunahme fähig ist, oder $\frac{1}{0}$ zur Gränze hat, heißt unendlich groß (infinite magnum potentia), und wenn man solche an ihrer Gränze vorstellt, (infinite magnum actu), so drückt man sie mit ∞, oder $\frac{1}{0}$ aus.

I. Zusatz: Unendlich kleine Größen sind keine Haupt- sondern Hilfsgrößen; denn von erstern ist ihr Werth durch die Aufgabe bestimmt (§. 294. I. Zus.) letztere aber können jeden beliebigen Werth von einer bestimmten Größe an bis auf o erhalten, d. i. eine unendlich kleine Größe ist eine Hilfsgröße, der man anfänglich einen beliebigen Werth giebt, und die man in der Folge bis auf o abnehmen läßt. Eben so ist das unendlich Große nur eine Hilfs- nicht aber Hauptgröße.

II. Zusatz: Der Unterschied einer Hilfsgröße und ihrer Hauptgröße, d. i. $x' - x$ ist unendlich klein; denn da x die Gränze von x' ist, so kann man anfangs x' so annehmen, daß $x' - x$ einen beliebigen Werth erhält, nachhin x' seiner Gränze x immer näher rücken, und selbst $x' = x$ setzen, folglich kann $x' - x$ bis auf o abnehmen.

III. Zusatz: Der Unterschied zweyer Hilfsgrößen x'', x' die einerley Hauptgröße x zur Gränze haben, oder $x'' - x'$, ist eine unendlich kleine Größe. Denn da x'', x' Hilfsgrößen sind, so kann man sie so annehmen, daß $x'' - x'$ einen beliebigen Werth erhält, da nun x von beyden die Gränze ist, so wird $x'' - x'$

immer

immer abnehmen, wenn sich x'' sowohl als x' ihrer Gränze x nähern, und an der Gränze selbst $x''-x'=0$ seyn.

§. 296.

Erklärungen:

a. Wenn sich das Verhältniß zweyer Größen $x:z$ dem Verhältnisse $1:0$ immer mehr nähert, mithin ihr letztes Verhältniß $=1:0$ ist, so heißt z in Beziehung auf x unendlich klein, und die Größe x in Beziehung auf z unendlich groß.

b. Wenn der Unterschied zweyer Größen so beschaffen ist, daß er zwar anfangs einen beliebigen Werth hat, aber bis auf 0 abnehmen kann, mithin eine unendlich kleine Größe ist, so sagt man, die eine Größe sey von der andern unendlich wenig unterschieden.

Zusatz: Wenn z in Beziehung auf x unendlich klein ist, so ist x von $x \pm z$ unendlich wenig unterschieden; denn da das letzte Verhältniß $x:$ zu $z = 1:0$ ex hyp., so ist $x \pm z : 1 \pm 0 = x:1$ (§. 214 I. Zus.) und $x \pm z = x$, mithin $(x \pm z) - x = 0$ die Gränze.

§. 297.

Erklärung:

Die Wissenschaft von unendlichen Größen heißt **Infinitesimalrechnung**, oder wegen der dabey üblichen analytischen Methode, die **Analysis des Unendlichen.**

Zusatz: Die Infinitesimalrechnung, inwieferne sie unendliche, d. i. Hilfsgrößen, mithin Größen aufnimmt, die als zufällige, zur Aufgabe nicht gehörige Größen, am Ende wieder weggeschaft werden müssen, kann

man

man eine unvollendete Rechnung nennen; denn sobald die Hilfs- oder unendlichen Größen entfernt sind, mithin nur Haupt- also endliche Größen vorkommen, so gehört der Calcul zur gewöhnlichen Algebra, oder Analysis des Endlichen.

§. 298.

Erklärungen:

a. Eine Gleichung, in welcher die beiden Seiten nach aller Schärfe einander gleich sind, mithin auf keiner Seite etwas fehlet, heißt eine **vollständige Gleichung** (aequatio completa).

b. Wenn hingegen die Seiten zwar ungleich, aber so beschaffen sind, daß ihr Unterschied unendlich klein, mithin das letzte Verhältniß der Seiten ein Verhältniß der Gleichheit ist, so kann man, wenn die Seiten in einer Gleichung dargestellt werden, diesen Ausdruck eine **unvollständige Gleichung** (aequatio incompleta) nennen.

c. Wenn die Seiten aber ungleich, und ihr Verhältniß bestimmt ist, und keine Annährung zum Verhältnisse der Gleichheit Statt hat, so ist die Gleichung falsch (aequatio falsa).

I. Zusatz: Wenn man eine unvollständige Gleichung nach den gewöhnlichen Reductionsgesetzen der Algebra behandelt, so bleibt sie eine unvollständige Gleichung.

II. Zusatz: Wenn man in einer unvollständigen Gleichung nur die lezten Werthe, d. i. die Werthe der Hilfsgrößen an ihren Gränzen betrachtet, so wird sie eine vollständige Gleichung.

§. 299.

Lehrsatz:

Wenn man in einer unvollständigen Gleichung an die Stelle einer Grösse eine andere setzet, die von ihr unendlich wenig unterschieden ist, so erhält man durch diese Substitution keine falsche Gleichung, das heißt, sie wird dadurch entweder eine vollständige, oder sie bleibt wenigstens eine unvollständige Gleichung.

Beweis:

Vermöge der Annahme wird an die Stelle einer Größe eine andere gesetzet, die mit ihr einerley letzten Werth hat, folglich bleiben auch nach dieser Verwechslung die letzten Werthe der Seiten die nemlichen, und ihr letztes Verhältniß einerlei: war also solches vorher das Verhältniß der Gleichheit, so bleibt dieses auch noch nach der Substitution, und die Gleichung hat wieder das Merkmal einer unvollständigen Gleichung, und ist also keine falsche Gleichung.

§. 300.

Lehrsatz:

Eine Gleichung, die bloß Hauptgrößen enthält, kann keine unvollständige Gleichung seyn.

Beweis:

In einer unvollständigen Gleichung sind ihre Seiten ungleich; aber unendlich wenig von einander unterschieden, und ihr letztes Verhältniß ein Verhältniß der Gleichheit, zu welchem eine beliebige Annäherung Statt hat; in einer Gleichung aber, die nur Hauptgrößen enthält, deren Werth durch die Aufgabe bestimmt ist, ist keine solche Annäherung zum Verhältniß

der Gleichheit zwiſchen den Seiten möglich, ſie kann alſo keine unvollſtändige Gleichung ſeyn.

§. 301.

Lehrſatz:

Eine unvollſtändige Gleichung, aus der man nach §. 299 alle Hilfsgrößen weggeſchaft hat, wird dadurch in eine vollſtändige Gleichung verwandelt.

Beweis:

Eine ſolche Gleichung iſt keine falſche (§. 299.), und keine unvollſtändige (§. 300.), mithin muß ſie eine vollſtändige werden.

I. Zuſatz: Da ſich jede Gleichung in eine Proportion, und jede Proportion in eine Gleichung auflöſen läßt (§. 210. IV. — VI. Zuſ.), ſo laſſen ſich ebenfalls vollſtändige und unvollſtändige Proportionen annehmen, und auf ſie leicht die drey Lehrſätze anwenden.

II. Zuſatz: Unvollſtändige Gleichungen und Proportionen, deren Merkmale die vorhandenen Hilfsgrößen ſind, laſſen ſich durch Eliminirung dieſer Hilfsgrößen in vollſtändige verwandeln, folglich iſt ihr Gebrauch in der Mathematik zuläſſig, ſo wie man ſich beym Mangel directer Beweiſe der indirecten bedient.

Anmerkung. Auf dieſe bisher angeführten Gründe ſtützet ſich die Infinitesimalrechnung, wenn man unendlich kleine Größen in einer Entfernung von ihren Gränzen, wo ſie alſo noch einen wahren endlichen Werth haben, wegläßt; man nimmt nämlich zur Erleichterung und Abkürzung des Calculs unvollſtändige

Gleichungen, entfernt aber nach und nach die Hilfsgrößen, und gelangt auf diesem einfachen Wege auf eben die Resultate, nämlich auf eine vollständige Gleichung. Carnot hat diese Gründe in seinen Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung vollständig entwickelt. In eben dieser Abhandlung wird auch die andere Methode der Infinitesimalrechnung, nach welcher man nur die Verhältnisse der unendlich kleinen Größen an ihren Gränzen darstellet, und die daher die Gränzmethode heißt, gerechtfertiget. Ich bediene mich meistens der erstern, weil sie mir für den Anfänger faßlicher scheint, der dabey die Construction nie aus den Augen verliert, indem alle Theile noch einen endlichen Werth behalten, mithin darstellbare und anschauliche Größen bleiben; ich werde aber auch weiter unten die Natur und Gründe der Gränzmethode darstellen, so daß es noch jedem frey stehet, zwischen beyden zu wählen, da sie im Calcul selbst nicht unterschieden sind, und beyde auf einerley gleich gewisse Resultate führen, so wie ich selbst von dieser Methode Gebrauch machen werde, wenn ich dadurch eine Aufgabe kürzer und faßlicher aufzulösen im Stande bin.

§. 302.

Erklärungen:

a. Wenn man zu einer veränderlichen Hauptgröße x eine Hilfsgröße x' so annimmt, daß $x' - x$ eine unendlich kleine Größe ist, so heißt dieser Unterschied, oder diese unendlich kleine Größe, das Differential von x, und mit dx bezeichnet, eben so drückt dy das Differential einer andern veränderlichen Hauptgröße

gröſſe y aus; d. i. $x' - x = dx$, u. $x' = x + dx$, eben ſo $v' - y = dy$ und $y' = y + dv$; inwieferne dx, dy an ihrer Gränze betrachtet werden, ſetzet man ſolchen das Zeichen lim. vor; z. B. lim. dx; lim. dy.

b. Wenn y eine Function der Hauptgröſſe x, alſo ſelbſt eine veränderliche Hauptgröſſe iſt; ſo heiſſen x, y zuſammengehörige Gröſſen; wenn man nun ſtatt x die Hilfsgröſſe $x' = x + dx$ ſetzet, ſo wird dadurch die Hilfsgröſſe $y' = y + dy$ beſtimmet, man nennet daher dx, dy die Differentiale der zuſammengehörigen Gröſſen x, y oder zuſammen gehörige Differentiale.

c. Wenn man zur veränderlichen Hauptgröſſe x nebſt x' noch eine Hilfsgröſſe x'' annimmt, ſo daß $x'' - x'$ wieder eine unendlich kleine Gröſſe dx' iſt, ſo heiſſt $dx' - dx$ ein Differentio-Differential, oder ein Differential der zweyten Ordnung, und wird mit d^2x bezeichnet; d. i. $dx' = dx + d^2x$, und eben ſo $dy' = dy + d^2y$; im Falle nun y wieder eine Function von x iſt, ſo heiſſen d^2x, d^2y zuſammen gehörige Differentiale der zweyten Ordnung.

d. Auf ähnliche Weiſe erhält man Differentialen der dritten, vierten Ordnung und ſo weiter, die mit d^3x, d^4x, . . . d^nx bezeichnet werden.

e. Um $dx \times dx$ zu bezeichnen, ſchreibt man dx^2; eben ſo $dx \times dx \times dx = dx^3$ u. ſ. f.

1. Zuſatz: dx^2, oder $dxdy$ iſt im Verhältniß zu dx unendlich klein; denn $dx : dx^2 = 1 : dx$; da nun dx die Null zur Gränze hat; ſo iſt das letzte Verhältniß

$dx : dx^2 = 1 : o$ (§. 296 a.); eben so ist $dx : dxdy = 1 : dy$, und da o die Gränze von dy ist, so wird das letzte Verhältniß $dx : dxdy = 1 : o$.

II. Zusatz: Aus eben diesen Gründen ist dx^3, oder $dx\,dy^2$, und $dxdydz$ im Verhältnisse zu dx^2 unendlich klein.

III. Zusatz: d^2x ist in Beziehung auf dx unendlich klein; denn da $d^2x = dx' - dx$; so ist

$dx : d^2x = dx : dx' - dx$; nun kann die Hilfsgröße x'' jeden beliebigen Werth haben, mithin dx' immer näher dem Differential dx rücken, oder dx ist die Gränze von dx', mithin das letzte Verhältniß:

$dx : d^2x = dx : dx(1-1) = 1 : o$ (§. 296. a.)

IV. Zusatz: Aus ähnlichen Gründen leuchtet ein, daß d^3x im Verhältnisse zu d^2x, und überhaupt $d^n x$ in Beziehung auf $d^{n-1} x$, d. i. ein Differential von einer jeden Ordnung in Beziehung auf das Differential der nächst niedern Ordnung unendlich klein sey.

II. Abschnitt.

Differentialrechnung.

§. 303.

Erklärungen:

a. Von einer Größe ihr Differential angeben, heißt sie differentiiren, das ist: wenn X eine Function von einer, oder mehreren veränderlichen Größen x, y ist, so heißt X differentiiren so viel, als die Größe angeben, um welche die Function zu- oder abnimmt, wenn sich die Größen x, y um dx, dy verändern, man setzet der Function das Zeichen d vor, z. B.

d (xy) heißt, man ſoll das Differential dieſes Productes angeben.

b. Die Wiſſenſchaft gegebene Gröſſen zu differentiiren, heißt die Differentialrechnung.

§. 304.

Lehrſatz:

Das Differential von der Summe, oder Differenz zweyer Gröſſen, iſt die Summe oder Differenz der Differentiale ihrer Theile, das iſt:

$$d(x \pm y) = dx \pm dy$$

Beweis:

Man ſetze $X = x \pm y$, ſo iſt (§. 303. a)

$$X' = x + dx \pm y \pm dy; \text{ mithin}$$

$$X' - X = dX = d(x \pm y) = dx \pm dy$$

Zuſatz: $d(a + x) = dx$; $d(ax) = adx$.

§. 305.

Lehrſatz:

Das Differential eines Productes zweyer veränderlichen Gröſſen iſt die Summe der Differentiale eines jeden Factors in das Differential des andern Factors multiplicirt, das iſt:

$$d(xy) = ydx + xdy$$

I. Beweis:

Man ſetze $X = xy$, ſo iſt

$$X' = (x + dx)(y + dy) = xy + ydx + xdy + dxdy$$

alſo $X' - X = dX = d(xy) = ydx + xdy + dxdy$.

Nun iſt dxdy in Beziehung auf ydx + xdy unendlich klein (§. 302. I. Zuſ.), mithin der Unterſchied von ydx + xdy und ydx + xdy + dxdy unendlich klein (§. 296. Zuſ.); folglich

$d(xy) = ydx + xdy$ eine unvollständige Gleichung (§. 298. b.), die man ihrer einfachen Gestalt wegen statt der vollständigen im Calcul annimmt (§. 301).

II. Beweis:

Bey Anwendung der Gränzmethode verfährt man nach folgenden Gründen:

1. $X = xy$

$X' = xy + ydx + xdy + dxdy$, also

$X' - X = dX = ydx + xdy + dxdy$, und

$$\frac{dX}{dx} = y + x\frac{dy}{dx} + dy$$

2. Man legt den Hilfsgrößen dx, dy, mithin auch dX anfänglich einen bestimmten Werth bey, das ist, man betrachtet die Größen in einer bestimmten Entfernung von ihrer Gränze, dadurch ist auch ihr Verhältniß ein bestimmtes Verhältniß;

3. Nun läßt man sie bis o abnehmen, oder betrachtet solche als verschwindende Größen an ihrer Gränze, so geschieht ihre Veränderung nach dem Gesetze der Stätigkeit, und durch eben dieses Gesetz ist die Veränderung ihres Verhältnisses bestimmt (§. 292).

4. So lange noch dx, dy von ihrer Gränze entfernt sind, also einen bestimmten Werth haben, so ist $\frac{dX}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$ eine unvollständige Gleichung, je näher nun dx, dy ihrer Gränze o kommen, desto mehr nähert sich das Verhältniß der beiden Seiten dem Verhältnisse der Gleichheit, folglich an der Gränze selbst ist dem Gesetze der Stätigkeit gemäß,

lim.

$\lim. \frac{dX}{dx} = y + x \lim. \left(\frac{dy}{dx}\right)$ eine vollständige Gleichung (§. 298. II. Zuſ.)

5. Man kann alſo dx, dy u. ſ. w. w., wenn ſie mit andern Gröſſen durch +, oder — verbunden ſind, als wahre Nullen weglaſſen, und iſt doch berechtigt, ihnen nach dem Geſetze der Stättigkeit ein beſtimmtes endliches Verhältniß beyzulegen, ſo wie zwiſchen zwey irrationalen Gröſſen ein rationales Verhältniß, und zwiſchen zwey unmöglichen Gröſſen ein wahres möglich iſt; man betrachtet nämlich nicht die Gröſſen, ſondern nur ihr Verhältniß.

Zuſatz: $d(axy) = aydx + axdy$;

$d(xy + a) = ydx + xdy$;

$d(xyz) = yzdx + xzdy + xydz$.

§. 306.

Lehrſatz:

Das Differential der Potenz einer veränderlichen Gröſſe iſt ein Product aus dem Exponenten der veränderlichen Gröſſe, dem unveränderlichen Coefficienten, der veränderlichen Gröſſe mit dem um 1 verminderten Exponenten, und dem Differentiale der einfachen veränderlichen Gröſſe, das iſt:

$$d\left(ax^m\right) = max^{m-1}dx.$$

Beweis:

Man ſetze $X = ax^m$, ſo iſt

$X' = a(x + dx)^m$

$= a(x^m + mx^{m-1}dx + \frac{m.(m-1)}{1.2}x^{m-2}dx^2$

$+$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}dx^3+\ldots \quad (\S.\,135.\,139.\,\text{I. Zuſ.})$$

mithin

$$X'-X=dX=max^{m-1}dx+\frac{m.(m-1)}{1.2.}ax^{m-2}dx^2$$

$$+\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3.}ax^{m-3}dx^3+\ldots$$

Nun iſt dx^2 in Beziehung auf dx, folglich das zweyte Glied der Reihe, und alle folgende Glieder, und ſelbſt ihre Summe in Beziehung auf das erſte Glied unendlich klein (§. 302. I. u. II Zuſ.); wenn man ſie alſo weglåßt, ſo erhält man nachſtehende unvollſtändige Gleichung (§. 296. Zuſ. §. 298. b.):

$$dX=d(ax^m)=max^{m-1}dx.$$

Anmerkung: Das Verfahren nach der Gränzmethode bey dieſem Lehrſatze läßt ſich aus §. 305. II. Beweiſe leicht einſehen; nämlich $\lim.\left(\frac{dX}{dx}\right)=max^{m-1}$ iſt eine vollſtändige Gleichung.

Zuſatz: $d(x^2)=2xdx;$

$d(x^3)=3x^2dx$

$d(\sqrt{x})=d(x^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ (§. 104 III. Zuſ.)

$d\left(\frac{1}{x^2}\right)=d\left(x^{-2}\right)=-2x^{-3}dx=\frac{-2dx}{x^3}$

$d\left(ax^my^n\right)=max^{m-1}y^ndx+nax^my^{n-1}dy$

§. 307.

Aufgabe:

Die Potenz einer zuſammengeſetzten veränderlichen Größe zu differentiiren, z. B.

$d\,(x^3\,(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}$ zu ſuchen.

Auflöſung:

Man ſetze die zuſammengeſetzte Größe $= u$, d. i.:

$a+bx^2 = u$, alſo $(a+bx^2)^{\frac{5}{3}} = u^{\frac{5}{3}}$, und

$x^3\,(a+bx^2)^{\frac{5}{3}} = x^3\,u^{\frac{5}{3}}$, ſo iſt

$d(x^3\,(a+bx^2)^{\frac{5}{3}} = 3x^2\,u^{\frac{5}{3}}\,dx + \frac{5}{3}\,x^3\,u^{\frac{2}{3}}\,du$ (§. 305, 306);

$= 3x^2\,(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}\,dx + \frac{5}{3}\,x^3\,(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}\,d(a+bx^2)$

$= 3x^2\,(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}\,dx + \frac{10}{3}\,b\,x^4\,(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}\,dx$

Zuſatz: $d(\sqrt{(a^2-x^2)}) = d(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{-x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$

$d(x^m \sqrt[q]{(a+bx^n)^p}) = d(x^m\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}})$

$= mx^{m-1}\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx + \frac{nbp}{q}\,x^{m+n-1}\,(a+bx^n)^{\frac{p-q}{q}}\,dx$

§. 308.

Lehrſatz:

Das Differential eines Bruches erhält man, wenn man vom Producte des Nenners in das Differential des Zählers das Product des Zählers in das Differential des Nenners abzieht, und den Reſt durch das Quadrat des Nenners dividirt, das iſt:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$

Be-

Beweis:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(xy^{-1}\right) \quad (\S.\ 104.\ III.\ Zuſ.)$$

$$= y^{-1}\,dx - xy^{-2}\,dy \quad (\S.\ 305).$$

$$= \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

Dieſe Gleichung iſt ebenfalls eine unvollſtändige wie jene §. 305.

Zuſatz: $d\left(\frac{ay^3}{x^2}\right) = \frac{3ax^2y^2\,dy - 2axy^3dx}{x^4}$

$$= \frac{3axy^2\,dy - 2ay^3\,dx}{x^3}$$

$$d\left(\frac{(x+a)^3}{(x+b)^2}\right) =$$

$$= \frac{3(x+b)^2(x+a)^2\,dx - 2(x+a)^3(x+b)\,dx}{(x+b)^4}$$

$$= \frac{3(x+b)(x+a)^2\,dx - 2(x+a)^3\,dx}{(x+b)^3}$$

$$= \frac{(x+3b-2a)(x+a)^2\,dx}{(x+b)^3}$$

§. 309.

Lehrſatz:

Das Differential vom natürlichen Logarithmus einer veränderlichen Größe erhält man, wenn man das Differential der veränderlichen Größe durch eben dieſe Größe dividirt, das iſt:

$$d\,(\log.\,nat.\,x) = \frac{dx}{x}$$

Beweis.

Beweis:

Man ſetze $X = \log.\,nat.\,x$; alſo

$X' = \log.\,nat.\,(x+dx)$; und

$X'-X = dX = \log.\,nat.\,(x+dx) - \log.\,nat.\,x$

$= \log.nat.\left(\frac{x+dx}{x}\right)$ (§. 228.); mithin

2. $dX = d\,(\log.\,nat.\,x) = \log.\,nat.\left(1+\frac{dx}{x}\right)$

3. Wenn man aber §. 236. I. Zuſ. a ſtatt x die Größe $\frac{dx}{x}$ ſubſtituirt, ſo wird

$$\log.\,nat.\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \frac{dx^4}{4x^4} + \ldots.$$

4. Da nun in Beziehung auf das erſte Glied der Reihe alle folgende unendlich klein ſind (§. 302. I. II. Zuſ.), ſo wird $\log.\,nat.\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x}$ eine unvollſtändige Gleichung ſeyn, folglich N° 2.

5. $d\,(\log.\,nat.\,x) = \frac{dx}{x}$ ebenfalls eine unvollſtändige Gleichung.

I. Zuſatz: Da x jede zuſammengeſetzte veränderliche Größe, mithin jede Function von einer oder mehreren veränderlichen Größen darſtellen kann, ſo iſt das Differential vom natürlichen Logarithmus einer Function dem Differentiale dieſer Funktion durch die Function dividirt gleich, d. i.

$$d\,(\log.\,nat.\,X) = \frac{dX}{X}$$

II. Zuſatz: $d\,(\log.\,nat.\,(a+x)) = \frac{dx}{a+x}$

$$d\,(\log.\text{nat.}\,x^n) = \frac{nx^{n-1}\,dx}{x^n} = \frac{n\,dx}{x}$$

III. Zusatz: Wenn A den Modul der briggischen oder gemeinen Logarithmen ausdrückt (§. 239.); so ist

$$d\,(\log.\text{vulg.}\,x) = d\,(A\log.\text{nat.}\,x)\ (\S.\ 240) = \frac{A\,dx}{x}$$

IV. Zusatz: Das Differential einer Function ist dem Producte aus der Function in das Differential ihres natürlichen Logarithmus gleich; denn

$$d\,(\log.\text{nat.}\,X) = \frac{dX}{X}\ \text{I. Zus.};\ \text{folglich}$$

$$dX = X\,d\,(\log.\text{nat.}\,X)$$

§. 310.

Erklärung:
Potenzen mit veränderlichen Exponenten heißen Exponentialgrößen.

§. 311. a

Aufgabe:
Eine Exponentialgröße zu differentiiren, wenn zwar der Exponent, nicht aber die Größe selbst veränderlich ist, z. B. $d\left(a^{mx}\right)$ suchen.

Auflösung:

$$d\left(a^{mx}\right) = a^{mx}\,d\left(\log.\text{nat.}\,a^{mx}\right)\ \S.\ 309.\ \text{IV. Zus.})$$

$$= a^{mx}\,d\,(mx\log.\text{nat.}\,a) = ma^{mx}\,dx\log.\text{nat.}\,a.$$

Zusatz: Wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen ausdrückt (§. 238. II. Zus.), mithin

$\log.\text{nat.}\,e = 1$

so

so ist $d\left(e^x\right) = e^x d\left(\log.\text{nat.}\, e^x\right) = e^x d\,(x \log.\text{nat.}\, e)$

$= e^x dx \log.\text{nat.}\, e = e^x dx$

§. 311. b

Aufgabe:

Eine Exponentialgröße zu differentiiren, wenn sowohl der Exponent, als die Größe selbst veränderlich sind,

z. B. $d\left(y^x\right)$ suchen.

Auflösung:

$d\left(y^x\right) = y^x d\left(\log.\text{nat.}\, y^x\right)$ (§. 309 IV. Zus.)

$= y^x d\,(x \log.\text{nat.}\, y)$ (§. 229.)

$= y^x dx \log.\text{nat.}\, y + xy^x \frac{dy}{y}$ (§. 305. u. 309).

$= y^x dx \log.\text{nat.}\, y + xy^{x-1} dy$

§. 312.

Lehrsatz:

Man findet das zweyte Differential eines Productes, wenn man das erste Differential nach §. 305 nochmal differentiirt, das ist

$d^2(xy) = xd^2y + yd^2x + 2\,dxdy = d(ydx + xdy)$

Beweis:

1) Man nehme $X = xy$, so ist

2) $X' = xy + ydx + xdy + dxdy$ (§. 305.) mithin

3) $X'' = (x + dx + dx')\,(y + dy + dy')$

$= (x + 2\,dx + d^2x)\,(y + 2dy + d^2y)$ (§. 302c.)

4) Dieses Product, so wie den fernern Calcul stellet die Vte Tabelle dar.

5)

$\frac{u^2}{1.2}$. lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ größer, als die Summe aller folgenden Glieder wird, so wird

3) wenn $\frac{u^2}{1.2}$ lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ eine negative Größe, mithin lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ negativ ist; denn u^2 ist allemal positiv (§. 99. und 100.), offenbar

$y > y + \frac{u^2}{1.2}$. lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \pm \frac{u^3}{1.2.3}$. lim. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \ldots\ldots$

folglich y ein Größtes.

4) Drückt aber lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, also auch $\frac{u^2}{1.2}$. lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ eine positive Größe aus, so ist

$y < y + \frac{u^2}{1.2}$. lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \pm \frac{u^3}{1.2.3}$. lim. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \ldots$

Folglich y ein Kleinstes.

5) Für lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, verwandelt sich die Reihe N° 1 in

$$y + v = y \pm \frac{u^3}{1.2.3} \cdot \lim. \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \\ + \frac{u^4}{1.2.3.4} \cdot \lim. \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) \pm \ldots$$

6) Da wieder $\frac{u^3}{1.2.3}$. lim. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ größer als die Summe der folgenden Glieder ist, mithin so lange dieses Glied einen endlichen Werth hat, so wird

$y < y + \frac{u^3}{1.2.3} \lim. \left[\frac{d^3y}{dx^3}\right] + \frac{u^4}{1.2.3.4} \lim. \left[\frac{d^4y}{dx^4}\right] +$

mithin y kein Größtes; ferner

$$y > y - \frac{u^3}{1.2.3} \cdot \lim.\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right] + \frac{u^4}{1.2.3.4} \cdot \lim.\left[\frac{d^4y}{dx^4}\right] - \ldots$$

folglich y kein Kleinstes seyn.

I. Zusatz: Auf ähnliche Art läßt sich darthun, daß, wenn $\lim.\left[\frac{dy}{dx}\right]$, $\lim.\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]$, $\lim.\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]$ sämmtlich $= o$ sind, bey einem negativen Werthe von $\lim.\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$ die Function ein Größtes, und bey einem positiven Werthe dieses Differentialgliedes, ein Kleinstes gebe; endlich überhaupt, daß nur alsdann ein Maximum oder Minimum statt finden könne, wenn das erste von den Differentialgliedern, welche nicht verschwinden, von gerader Ordnung ist, und daß dieses Glied für das Maximum negativ, und für das Minimum positiv seyn müsse.

II. Zusatz: Da $y^2 = ax - x^2$ eine zweyförmige Function von x ist (§. 186. b); denn $y = \pm\sqrt{(ax - x^2)}$, so kann man sowohl $y = \sqrt{(ax - x^2)}$, als für den andern Werth $y = -\sqrt{(ax - x^2)} = \sqrt{(x^2 - ax)}$ aus dem I. Zus. bestimmen, ob der Function ein Maximum oder Minimum zukomme.

§. 320.

Aufgabe:

Von einer einförmigen Function von x ihr Maximum und Minimum zu bestimmen.

Auflösung:

x) Man differentiire die Function, und setze das Gränz-

ver-

verhältniß lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = o$ (§. 318.)

2) Aus dieſer Gleichung beſtimme man den Werth von x,

3) Suche das zweite Differential der Function, wo aber dx unveränderlich iſt, und beſtimme den Werth von lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, indem man für x deſſen Werth aus Nr 2. ſetzet;

4) Wird nun nach der Subſtitution lim. $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]$ negativ, ſo giebt für dieſen Werth von x die Function ein Größtes (§. 319. a)

5) wird hingegen einer, oder mehrere Werthe von x, (wenn x mehrere zukommen können) nach der Subſtitution die Größe lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ poſitiv, ſo iſt für jeden dieſer Werthe von x die Function ein Kleinſtes (§. 319. b);

6) Wird aber nach der Subſtitution lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = o$, ſo muß man das dritte Differential der Function nehmen, und aus lim. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = o$ die Werthe von x beſtimmen (§. 319. c)

7) Nun ſuche man das vierte Differential von der Function, und ſubſtituire die Nr. 6 gefundenen Werthe von x; bekömmt man lim. $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$ als negative Größe, ſo entſpricht der Function ein Maximum, und im Falle

lim.

lim. $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$ negativ wird, so ist für solchen Werth von x die Function ein Minimum (§. 319. I. Zus.)

8) Im Falle aber lim. $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = 0$ ist, so läßt sich aus dem bisherigen, und aus §. 319. I. Zusatz das fernere Verfahren leicht einsehen.

§. 321.

Aufgaben zur Uebung.

I. Aufgabe:

Man soll eine gegebene Zahl a in zwey solche Theile theilen, daß ihr Product ein Maximum ist.

Auflösung:

Man bezeichne den einen Theil mit x, also den andern mit $a - x$; das Product mit y; so ist

$y = ax - x^2$; $dy = adx - 2xdx$; lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = a - 2x = 0$

also $x = \frac{1}{2}a$;

ferner $d^2y = -2dx^2$, also lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -2$,

folglich wenn man statt x die Größe $\frac{1}{2}a$ setzet, das ist, wenn man die Zahl a in zwey gleiche Theile theilet, so wird die Function ein Maximum, d. i.

$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2 = \text{Max.}$

für $a = 10$; ist $5 \times 5 = 25$ ein Größtes.

II. Aufgabe:

Anzugeben, ob, und bey was für einem Werthe von x die Function $x^2 + 3x + 2$ ein Max. oder Min. gebe.

Auflösung:

Man setze $y = x^2 + 3x + 2$, also $dy = 2xdx + 3dx$,

lim.

$\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2x + 3 = 0;\ x = -\frac{3}{2}$.

Ferner $d^2y = 2\,dx^2$; also $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2$, und die Function ist für $x = -\frac{3}{2}$ ein Minimum, das ist

$\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{1}{4} = \text{Min.}$

III Aufgabe:

Die Fälle anzugeben, in welchen die Function von

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

ein Größtes, oder Kleinstes wird.

Auflösung:

1) Man setze $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$, so ist $dy = 4x^3\,dx - 24x^2\,dx + 44x\,dx - 24\,dx$; und $\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$, mithin

2) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Man erhält hier für x die 3 Werthe (§. 174.)

I $x = 1$; II $x = 2$; III $x = 3$.

3) $d^2y = 12x^2\,dx^2 - 48x\,dx^2 + 44\,dx^2$, also

$$\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12x^2 - 48x + 44$$

4) Substituirt man nach einander die für x gefundenen Werthe, so ist

I. für $x = 1$, $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12 - 48 + 44 = 8$.

folglich die Function für $x = 1$, d. i.

$$1 - 8 + 22 - 24 + 12 = 3 = \text{Min.}$$

II. für $x = 2$, $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12 \times 4 - 48 \times 2 + 44$

$$= -4$$

mithin

mithin die Function ein Größtes, das ist
$16 - 64 + 88 - 48 + 12 = 4 = \text{Max.}$

III. Für $x = 3$ wird $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12 \times 9 - 48 \times 3 + 44 = 8$
folglich giebt die Function wieder ein Kleinstes, das ist: $81 - 216 + 198 - 72 + 12 = 3 = \text{Min.}$

IV. Abschnitt.

Integralrechnung.

§. 322.

Erklärungen:

a. Eine Größe integriren, heißt aus einem gegebenen Differential die Größe selbst finden, durch deren Differentiirung die gegebene Differentialgröße entstanden ist. Man setzet dem Differential, welches integriret werden soll, das Zeichen ($\int$) vor; so z. B. heißt $\int adx$, man soll adx integriren.

b. Die Wissenschaft gegebene Differentiale zu integriren, heißt die Integralrechnung.

I. Zusatz: Da eine veränderliche Größe einerley Differential behält, wenn man eine beständige Größe zu ihr addirt, oder davon subtrahirt, d. i. x, $x + a$, und $x - a$ hat dx zum Differential, so zeiget man diese beständige Größe durch + C im Integral an, z. B. $\int dx = x + C$, wo aber erst durch die Bedingungen der Aufgabe C bestimmt werden kann.

II. Zusatz: Da die Differentialgleichungen und Proportionen größten Theils unvollständig sind (§. 305.

306 ꝛc.), ſo erhält man auch aus ihnen durch Integration nur unvollſtändige Gleichungen und Proportionen, die aber bey der Anwendung, wo die Hilfsgrößen eliminirt werden, in vollſtändige übergehen (§. 301.)

§. 323.

Erklärungen:

a. Die in einem Differential mit dem Zeichen + oder — verbundenen Größen heißen Theile oder Glieder.

b. Differentiale, die nur ein Glied enthalten, heißen eintheilige, einnamige Differentiale, z. B. dx, adx, $bx^n dx$; $\frac{2xdx}{x^2}$ u. ſ. f.; die hingegen aus mehrern Gliedern beſtehen, heißen mehrtheilige, mehrnamige Differentiale, z. B. $dx^3dx + \frac{bx^2dx}{c}$; oder $\frac{adx}{a+x}$ u. ſ. w.

§. 324.

Aufgabe:

Das Integral eines eintheiligen Differentials zu ſuchen, wenn die veränderliche Größe weder den Exponenten -1, noch im Nenner den Exponenten $+1$ enthält.

Auflöſung:

1) Man vermehre im gegebenen Differentiale den Exponenten der veränderlichen Größe um 1,

2) dividire ſolches mit dem Producte aus dem Differential der veränderlichen Größe in dieſen um 1 vermehrten Exponenten.

a)

3) Setze endlich diesem Integrale die beständige Größe oder + C bey.

Beweis:

Offenbar läßt sich jedes eintheilige Differential durch $ax^n dx$ ausdrücken, wo n jede Zahl, nur nicht -1 nach den Bedingungen der Aufgabe seyn kann;

Nun ist aber $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{(n+1)\frac{dx}{dx}} = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$, denn wenn man letzteres differentiirt (§. 306.), so erhält man $ax^n dx$;

Endlich muß noch C addirt werden (§. 322. I. Zus.);

folglich $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{(n+1)dx} + C.$

Zusatz:

a. $\int 2x dx = \frac{2x^2 dx}{2dx} + C = x^2 + C$

b. $\int a dx = \frac{ax\,dx}{dx} + C = ax + C.$

c. $\int ax^{\frac{2}{3}} dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1} dx}{(\frac{2}{3}+1)dx} + C = \frac{3}{5} ax^{\frac{5}{3}} + C.$

d. $\int \frac{a dx}{x^3} = \int ax^{-3} dx = \frac{ax^{-2} dx}{-2\,dx} + C = -\frac{1}{2} ax^{-2} + C$

$= -\frac{a}{2x^2} + C.$

e. $\int a dx \sqrt[3]{x^2} = \int ax^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} ax^{\frac{5}{3}} + C.$

Werthe zukommen, die von einander unterschieden, also nicht zugleich maxima oder minima seyn können; so schränket sich die Untersuchung eigentlich nur auf einförmige Functionen von x ein.

§. 318.

Lehrsatz:

Wenn y eine einförmige Function von x ist, so giebt es kein Größtes, und kein Kleinstes, wofern nicht $\lim. \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ ist.

Beweis:

1) Die Function y verwandle sich, wenn dx als beständige Größe angenommen wird, und x den Werth $x \pm u$ erhält, in $y + v$, so ist §. 316. II. Zus.

$$y + v = y \pm u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \mp \frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + \ldots\ldots$$

2) Man kann nun immer u so klein annehmen, daß $u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right)$ größer als die Summe aller folgenden Glieder der Reihe wird; soll also

3) y ein Maximum seyn, so muß

$$y > y \pm u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \mp \ldots\ldots$$

seyn; dieses ist aber unmöglich, wenn nicht $u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ ist; denn offenbar, wenn $u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right)$ eine positive wirkliche Größe ist, so ist

$$y < y + u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \ldots (N, 2.)$$

4)

4) Soll hingegen y ein Kleinſtes ſeyn, ſo muß

$$y < y \pm u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1,2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \pm \ldots.$$

welches ebenfalls unmöglich iſt, ſo lange u. lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ einen endlichen Werth hat, weil offenbar

$$y > y - u \lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2}\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \ldots.$$

5) u. lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ kann nur Null werden, wenn lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ iſt, weil u allemal einen beſtimmten endlichen Werth erhält.

§. 319.

Lehrſatz:

Eine einförmige Function y von x, in welcher lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ iſt, giebt

a. ein Größtes, wenn lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ eine negative Größe,

b. ein Kleinſtes, wenn lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ eine poſitive Größe,

c. keines von beyden, wenn lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ iſt, und lim. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ noch einen endlichen Werth hat.

Beweis:

a) Wenn lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, mithin auch u. lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ iſt, ſo wird §. 318. N° 1.

$$y + v = y + \frac{u^2}{1\,2}\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \pm \frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) +$$

b) Da man wieder u ſo klein annehmen kann, daß

u^2

$\frac{u^2}{1.2} \cdot \lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ größer, als die Summe aller folgenden Glieder wird, so wird

3) wenn $\frac{u^2}{1.2} \lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ eine negative Größe, mithin $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ negativ ist; denn u^2 ist allemal positiv (§. 99. und 100.), offenbar

$y > y + \frac{u^2}{1.2} \cdot \lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \pm \frac{u^3}{1.2.3} \cdot \lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \ldots$

folglich y ein Größtes.

4) Drückt aber $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, also auch $\frac{u^2}{1.2} \cdot \lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ eine positive Größe aus, so ist

$y < y + \frac{u^2}{1.2} \cdot \lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \pm \frac{u^3}{1.2.3} \cdot \lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \ldots$

Folglich y ein Kleinstes.

5) Für $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, verwandelt sich die Reihe N° 1 in

$$y + v = y \pm \frac{u^3}{1.2.3} \cdot \lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \frac{u^4}{1.2.3.4} \cdot \lim.\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) \pm \ldots$$

6) Da wieder $\frac{u^3}{1.2.3} \cdot \lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ größer als die Summe der folgenden Glieder ist, mithin so lange dieses Glied einen endlichen Werth hat, so wird

$y < y + \frac{u^3}{1.2.3} \lim.\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right] + \frac{u^4}{1.2.3.4} \lim.\left[\frac{d^4y}{dx^4}\right] +$

mithin y kein Gröſstes; ferner

$$y > y - \frac{u^3}{1.2.3} \cdot \lim.\left[\frac{d^3v}{dx^3}\right] + \frac{u^4}{1.2.3.4} \cdot \lim.\left[\frac{d^4y}{dx^4}\right] - \ldots$$

folglich y kein Kleinſtes ſeyn.

I. Zuſatz: Auf ähnliche Art läſst ſich darthun, daſs, wenn $\lim.\left[\frac{dy}{dx}\right]$, $\lim.\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]$, $\lim.\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]$ ſämmtlich $= 0$ ſind, bey einem negativen Werthe von $\lim.\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$ die Function ein Gröſstes, und bey einem poſitiven Werthe dieſes Differentialgliedes, ein Kleinſtes gebe; endlich überhaupt, daſs nur alsdann ein Maximum oder Minimum ſtatt finden könne, wenn das erſte von den Differentialgliedern, welche nicht verſchwinden, von gerader Ordnung iſt, und daſs dieſes Glied für das Maximum negativ, und für das Minimum poſitiv ſeyn müſſe.

II. Zuſatz: Da $y^2 = ax - x^2$ eine zweyförmige Function von x iſt (§. 186. b); denn $y = \pm\sqrt{(ax - x^2)}$, ſo kann man ſowohl $y = \sqrt{(ax - x^2)}$, als für den andern Werth $y = -\sqrt{(ax - x^2)} = \sqrt{(x^2 - ax)}$ aus dem I. Zuſ. beſtimmen, ob der Function ein Maximum oder Minimum zukomme.

§. 320.

Aufgabe:

Von einer einförmigen Function von x ihr Maximum und Minimum zu beſtimmen.

Auflöſung:

1) Man differentiire die Function, und ſetze das Gränz-

ver-

verhältniß lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = o$ (§. 318.)

2) Aus dieser Gleichung bestimme man den Werth von x,

3) Suche das zweite Differential der Function, wo aber dx unveränderlich ist, und bestimme den Werth von lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, indem man für x dessen Werth aus Nr 2. setzet;

4) Wird nun nach der Substitution lim. $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]$ negativ, so giebt für diesen Werth von x die Function ein Größtes (§. 319. a)

5) wird hingegen einer, oder mehrere Werthe von x, (wenn x mehrere zukommen können) nach der Substitution die Größe lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ positiv, so ist für jeden dieser Werthe von x die Function ein Kleinstes (§. 319. b);

6) Wird aber nach der Substitution lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = o$, so muß man das dritte Differential der Function nehmen, und aus lim. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = o$ die Werthe von x bestimmen (§. 319. c)

7) Nun suche man das vierte Differential von der Function, und substituire die Nr. 6 gefundenen Werthe von x; bekömmt man lim. $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$ als negative Größe, so entspricht der Function ein Maximum, und im Falle

lim.

lim. $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$ negativ wird, so ist für solchen Werth von x die Function ein Minimum (§. 319. I. Zus.)

8) Im Falle aber lim. $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = 0$ ist, so läßt sich aus dem bisherigen, und aus §. 319. I. Zusatz das fernere Verfahren leicht einsehen.

§. 321.

Aufgaben zur Uebung.

I. Aufgabe:

Man soll eine gegebene Zahl a in zwey solche Theile theilen, daß ihr Product ein Maximum ist.

Auflösung:

Man bezeichne den einen Theil mit x, also den andern mit $a - x$; das Product mit y; so ist

$y = ax - x^2$; $dy = adx - 2xdx$; lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = a - 2x = 0$

also $x = \frac{1}{2}a$;

ferner $d^2y = -2dx^2$, also lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -2$,

folglich wenn man statt x die Größe $\frac{1}{2}a$ setzet, das ist, wenn man die Zahl a in zwey gleiche Theile theilet, so wird die Function ein Maximum, d. i.

$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2 = \text{Max.}$

für $a = 10$; ist $5 \times 5 = 25$ ein Größtes.

II. Aufgabe:

Anzugeben, ob, und bey was für einem Werthe von x die Function $x^2 + 3x + 2$ ein Max. oder Min. gebe.

Auflösung:

Man setze $y = x^2 + 3x + 2$, also $dy = 2xdx + 3dx$,

lim.

lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2x + 3 = 0$; $x = -\frac{3}{2}$.

Ferner $d^2y = 2dx^2$; also lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2$, und die Function ist für $x = -\frac{3}{2}$ ein Minimum, das ist

$\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{1}{4} = \text{Min.}$

III Aufgabe:

Die Fälle anzugeben, in welchen die Function von

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

ein Größtes, oder Kleinstes wird.

Auflösung:

1) Man setze $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$, so ist $dy = 4x^3 dx - 24x^2 dx + 44x dx - 24 dx$; und lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$, mithin

2) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Man erhält hier für x die 3 Werthe (§. 174.)

I $x = 1$; II $x = 2$; III $x = 3$.

3) $d^2y = 12x^2 dx^2 - 48x dx^2 + 44 dx^2$, also

lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12x^2 - 48x + 44$

4) Substituirt man nach einander die für x gefundenen Werthe, so ist

I. für $x = 1$, lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12 - 48 + 44 = 8$.

folglich die Function für $x = 1$, d. i.

$$1 - 8 + 22 - 24 + 12 = 3 = \text{Min.}$$

II. für $x = 2$, lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12 \times 4 - 48 \times 2 + 44$

$= -4$

mithin

mithin die Function ein Größtes, das ist
$16 - 64 + 88 - 48 + 12 = 4 = \text{Max.}$

III. Für $x = 3$ wird $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12 \times 9 - 48 \times 3 + 44 = 8$

folglich giebt die Function wieder ein Kleinstes, das ist: $81 - 216 + 198 - 72 + 12 = 3 = \text{Min.}$

IV. Abschnitt.

Integralrechnung.

§. 322.

Erklärungen:

a. Eine Größe integriren, heißt aus einem gegebenen Differential die Größe selbst finden, durch deren Differentiirung die gegebene Differentialgröße entstanden ist. Man setzet dem Differential, welches integriret werden soll, das Zeichen ($\int$) vor; so z. B. heißt $\int adx$, man soll adx integriren.

b. Die Wissenschaft gegebene Differentiale zu integriren, heißt die Integralrechnung.

I. Zusatz: Da eine veränderliche Größe einerley Differential behält, wenn man eine beständige Größe zu ihr addirt, oder davon subtrahirt, d. i. x, $x + a$, und $x - a$ hat dx zum Differential, so zeiget man diese beständige Größe durch $+ C$ im Integral an, z. B. $\int dx = x + C$, wo aber erst durch die Bedingungen der Aufgabe C bestimmt werden kann.

II. Zusatz: Da die Differentialgleichungen und Proportionen größten Theils unvollständig sind (§. 305.

306 ꝛc.), ſo erhält man auch aus ihnen durch Integration nur unvollſtändige Gleichungen und Proportionen, die aber bey der Anwendung, wo die Hilfsgrößen eliminirt werden, in vollſtändige übergehen (§. 301.)

§. 323.

Erklärungen:

a. Die in einem Differential mit dem Zeichen + oder — verbundenen Größen heißen Theile oder Glieder.

b. Differentiale, die nur ein Glied enthalten, heißen eintheilige, einnamige Differentiale, z. B. dx, adx, $bx^n dx$; $\frac{2xdx}{x^2}$ u. ſ. f.; die hingegen aus mehrern Gliedern beſtehen, heißen mehrtheilige, mehrnamige Differentiale, z. B. $4x^3dx + \frac{bx^2dx}{c}$; oder $\frac{adx}{a+x}$ u. ſ. w.

§. 324.

Aufgabe:

Das Integral eines eintheiligen Differentials zu ſuchen, wenn die veränderliche Größe weder den Exponenten — 1, noch im Nenner den Exponenten + 1 enthält.

Auflöſung:

1) Man vermehre im gegebenen Differentiale den Exponenten der veränderlichen Größe um 1,

2) dividire ſolches mit dem Producte aus dem Differential der veränderlichen Größe in dieſen um 1 vermehrten Exponenten.

a)

3) Setze endlich diesem Integrale die beständige Größe oder + C bey.

Beweis:

Offenbar läßt sich jedes eintheilige Differential durch $ax^n dx$ ausdrücken, wo n jede Zahl, nur nicht -1 nach den Bedingungen der Aufgabe seyn kann;

Nun ist aber $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{(n+1)\frac{dx}{dx}} = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$, denn wenn man letzteres differentiirt (§. 306.), so erhält man $ax^n dx$;

Endlich muß noch C addirt werden (§. 322. I. Zus.);

folglich $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{(n+1)\frac{dx}{dx}} + C.$

Zusatz:

a. $\int 2x dx = \frac{2x^2 dx}{2dx} + C = x^2 + C$

b. $\int a dx = \frac{ax\,dx}{dx} + C = ax + C.$

c. $\int ax^{\frac{2}{3}} dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1} dx}{(\frac{2}{3}+1)dx} + C = \frac{3}{5} ax^{\frac{5}{3}} + C.$

d. $\int \frac{2dx}{x^3} = \int ax^{-3} dx = \frac{ax^{-2}dx}{-2\,dx} + C = -\frac{1}{2} ax^{-2} + C$

$= -\frac{a}{2x^2} + C.$

e. $\int a dx \sqrt[3]{x^2} = \int ax^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} ax^{\frac{5}{3}} + C.$

§. 325.

Aufgabe:

Differentiale zu integriren, in welchen die veränderliche Größe den Exponenten — 1, oder der veränderliche ein- oder mehrtheilige Nenner den Exponenten + 1 bey sich hat.

Auflösung:

1) Man suche dem Differentiale so eine Form zu geben, wenn es nicht schon selbe hat, daß der Zähler das Differential des Nenners enthält, geht dieses an, so ist

2) das Integral des gegebenen Differentials der natürliche Logarithmus des Nenners, nebst einer beständigen Größe (§. 309. I. Zus. u. §. 322. I. Zus.)

3) Läßt sich aber obige Verwandlung nicht bewirken, so werden später Integrationsmethoden angegeben werden, die aber nicht für alle Fälle zureichend sind, so wie man überhaupt in der Integralrechnung noch nicht im Stande ist, alle gegebene Differentiale zu integriren.

Zusatz:

a. $\int \frac{dx}{a+x} = \text{log. nat. } (a+x) + C$

b. $\int \frac{2x\,dx}{a^2+x^2} = \text{log. nat. } (a^2+x^2) + C$

c. $\int \frac{bx^2dx}{a^3+x^3} = \frac{b}{3}\int \frac{3x^2dx}{a^3+x^3} = \frac{b}{3}\text{ log. nat. } (a^3+x^3) + C.$

d. $\int \frac{dx}{a-x} = -1\int \frac{-dx}{a-x} = -\text{log. nat. } (a-x) + C$

$= \text{log. nat. } 1 - \text{log. nat. } (a-x) + C$

$= \text{log. nat. } \left(\frac{1}{a-x}\right) + C$

§. 326.

Aufgabe:

Eine mehrtheilige Größe zu integriren, die nicht aus zusammengesetzten Dignitäten besteht.

Auflösung:

1) Man integrire jedes einzelne Glied nach §. 324, und wo dieses nicht angeht, nach §. 325.,

2) addire am Ende die beständige Größe C.

Beweis:

So wie das Differential einer mehrtheiligen Größe aus der Summe der Differentiale besteht (§. 304); so muß umgekehrt die Summe der einzelnen Integrale das Integral vom Ganzen geben.

Zusatz:

a. $\int (ax^3dx + \frac{bx^2dx}{c} + edx) = \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3c} + ex + C.$

b. $\int \left(ax^3\,dx + bx^{-4}dx + \frac{2xdx}{a^2+x^2} \right) = \frac{ax^4}{4} - \frac{bx^{-3}}{3} + \log.\,nat.\,(a^2 + x^2) + C.$

§. 327.

Aufgabe:

Zusammengesetzte, d. i. mehrtheilige Potenzen zu integriren, wenn der Exponent der zusammengesetzten Potenz eine ganze positive Zahl ist.

Auflösung:

1) Man erhebe die Größe zur Dignität, welche der Exponent angiebt,

2) integrire wieder nach §. 324 oder 325 alle einzelne Glieder.

3) addire die beständige Größe C.

Beweis:

Wenn der Exponent eine positive ganze Zahl ist, so lassen sich alle Glieder vollständig darstellen (§. 135.), mithin durch ihre Integration das Integral vom Ganzen angeben (§. 326.)

Zusatz:

a. $\int gx^3dx\,(a+bx^2)^2 = \int gx^3dx\,(a^2+2abx^2+b^2x^4)$

$= \int (a^2gx^3dx + 2abgx^5\,dx + b^2gx^7dx)$

$= \frac{a^2gx^4}{4} + \frac{abgx^6}{6} + \frac{b^2gx^8}{8} + C.$

b. $\int \frac{adx}{x^3}(a+bx^2)^2 = \int ax^{-3}dx(a^2+2abx^2+b^2x^4)$

$= \int (a^3x^{-3}dx + 2a^2bx^{-1}dx + ab^2xdx)$

$= -\frac{a^3}{2x^2} + 2a^2b \log.\text{nat.}\, x + \frac{1}{2}ab^2x^2 + C.$

§. 328.

Aufgabe:

Ein Differential mit zusammengesetzten Potenzen zu integriren, der Exponent davon mag eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl seyn, wenn die Größe, in welche die zusammengesetzte Dignität multiplicirt ist, das Differential derselben enthält.

Auflösung:

1) Wenn der Exponent der zusammengesetzten Größe nicht $= -1$ ist, so behandle man die ganze eingeschlossene Größe als eine einfache veränderliche Größe, und bestimme das Integral aus §. 324.

2) Wenn hingegen der Exponent der zusammengesetzten Größe $= -1$ ist, so suche man das Integral aus §. 325.

Beweis:

Beweis:

Wenn man die zusammengesetzte Größe $= X$ setzet, so stellet $dX\,(X)^m$ den ersten, und $X^{-1}\,dX = \frac{dX}{X}$ den zweyten Fall allgemein dar;

Nun ist $\int dX\,(X)^m = \frac{X^{m+1}}{m+1} + C$ (§. 324.)

und $\int \frac{dX}{X} = \log.\,nat.\,X + C$ (§. 325.).

Zusatz:

a. $\int (adx + 2xdx)(ax + x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{(adx + 2xdx)(ax + x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(adx + 2xdx)} + C$

$= 2\sqrt{(ax + x^2)} + C.$

b. $\int (adx + 2xdx)(ax + x^2)^{-1} = \log.\,nat.\,(ax + x^2) + C.$

§. 329.

Aufgabe:

Wenn in einem Differential mit einer zweytheiligen Dignität jedes Glied die veränderliche Größe enthält, aus einem Gliede die veränderliche Größe wegzuschaffen, z. B. aus

$$\frac{a^2 dx}{x\sqrt{(ax + x^2)}} = a^2 x^{-1} dx\,(ax + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Auflösung:

1) Man dividire die beyden Glieder des Binomiums mit jener veränderlichen Größe, die man aus einem Gliede wegschaffen will;

2) Eben diese Größe erhebe man zur Dignität des Binomiums,

nomiums, und multiplicire damit die Größe außer dem Binomio; d. i.

I. $a^2x^{-1}dx(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^2x^{-\frac{3}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}$;

Eben so ist

II. $a^2x^{-1}dx(ax+x^2)^{-\frac{1}{4}} = a^2x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$

Beweis:

I. $ax+x^2 = x(a+x)$,

$(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}(a+x)^{-\frac{1}{2}}$; folglich

$a^2x^{-1}dx(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^2x^{-\frac{3}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}$

wo die veränderliche Größe aus dem ersten Gliede eliminirt ist.

II. $ax+x^2 = x^2(\frac{a}{x}+1) = x^2(ax^{-1}+1)$

$(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = x^{-1}(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$

$a^2x^{-1}dx(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^2x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$

wo aus dem zweyten Gliede die veränderliche Größe weggeschafft ist.

§. 330.

Aufgabe:

Die veränderliche Größe aus einem Gliede in das andere Glied einer zweytheiligen Dignität bey einem gegebenen Differential zu schaffen.

Auflösung:

1) Man dividire beyde Glieder des Binomiums mit der veränderlichen Größe;

2) Erhebe solche zur Dignität des Binomiums, und multiplicire damit die Größe außer dem Binomio. So ist z. B.

$x^{-\frac{3}{2}}dx(a^2x^{\frac{1}{2}}-2)^{-2} = x^{\frac{5}{2}}dx(a^2-2x^{-\frac{1}{2}})^{-2}$

Beweis:

$a^2x^{\frac{1}{2}}-2=x^{\frac{1}{2}}(a^2-2x^{-\frac{1}{2}})$

$(a^2x^{\frac{1}{2}}-2)^{-2}=x^{-1}(a^2-2x^{-\frac{1}{2}})^{-2}$

$x^{-\frac{3}{2}}dx(a^2x^{\frac{1}{2}}-2)^{-2}=x^{-\frac{5}{2}}dx(a^2-2x^{-\frac{1}{2}})^{-2}$

§. 331.

Lehrsatz:

$gx^n dx(a+bx^m)^p$ läßt sich integriren, wenn der um 1 vermehrte Exponent n der veränderlichen Größe außer dem Binomio, durch den Exponenten m eben dieser veränderlichen Größe im Binomio dividirt, eine positive ganze Zahl zum Quotienten giebt, das ist, wenn $\frac{n+1}{m}$ eine positive ganze Zahl ist, es mag p jede beliebige Zahl seyn.

Beweis:

1) Man setze $a+bx^m=z$, also $(a+bx^m)^p=z^p$, und

2) $x=\frac{(z-a)^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}$; $dx=\frac{dz}{mb^{\frac{1}{m}}}(z-a)^{\frac{1}{m}-1}$, und

3) $x^n=\frac{(z-a)^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$, folglich

4)

4) $gx^n dx(a+bx^m)^p = g\cdot\frac{(z-a)^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}\cdot\frac{dz}{mb^{\frac{1}{m}}}(z-a)^{\frac{1}{m}-1}\times z^p$

$= \frac{gz^p dz}{mb^{\frac{n+1}{m}}}(z-a)^{\frac{n+1}{m}-1}$

5) Ist nun $\frac{n+1}{m}$ eine ganze positive Zahl, so ist auch $\frac{n+1}{m}-1$ entweder eine ganze positive Zahl, oder Null, im Falle $\frac{n+1}{m}=1$ ist, allemal aber läßt sich das Integral aus §. 327, oder für $\frac{n+1}{m}-1=0$ aus §. 324 und 325 finden.

§. 332.

Aufgabe:

$gx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{3}}$ zu integriren.

Auflösung.

1) Da $\frac{3+1}{2}=2$ eine positive ganze Zahl ist, so läßt sich das Integral aus §. 331 bestimmen.

2) Man setze $a+bx^2=z$; ferner $n=3$; $m=2$; $p=\frac{4}{3}$; und $\frac{n+1}{m}-1=1$; so ist (§. 331. Nr. 4).

3) $gx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{3}} = \frac{gz^{\frac{4}{3}}dz}{2b^2}(z-a)$; folglich

4) $\int gx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{3}} = \int\left(\frac{gz^{\frac{7}{3}}dz}{2b^2}-\frac{agz^{\frac{4}{3}}dz}{2b^2}\right)$

$= \frac{3gz^{\frac{14}{3}}}{28b^2}-\frac{3agz^{\frac{9}{3}}}{18b^2}+C$

5) Substituirt man wieder für z dessen Werth Nr. 2., so wird

$$\int gx^3dx\,(a+bx^2)^{\frac{4}{3}} = \frac{5g}{28b^2}\,(a+bx^2)^{\frac{14}{5}} - \frac{5^2g}{18b^2}(a+bx^2)^{\frac{9}{5}} + C.$$

§. 333.

Aufgabe:

Das Integral von $gx^8dx\,(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$ zu suchen.

Auflösung:

1. Offenbar ist das gegebene Differential unter der Formel §. 331. enthalten, und da $\frac{8+1}{3} = 3$ eine positive ganze Zahl, so läßt es sich integriren.

2. Man setze $(a+bx^3) = z$, so ist ferner in der Formel §. 331. Nr. 4. $n=8$; $m=3$; $\frac{n+1}{m}=3$; $\frac{n+1}{m} - 1 = 2$; $p = -\frac{2}{3}$; folglich

3. $$gx^8dx\,(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{gz^{-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}\,(z-a)^2$$
$$= \frac{g}{3b^3}z^{-\frac{2}{3}}dz\,(z^2-2az+a^2) = \frac{g}{3b^3}(z^{\frac{4}{3}}dz - 2az^{\frac{1}{3}}dz + a^2z^{-\frac{1}{3}}dz)$$

4. $$\int gx^8dx\,(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{g}{3b^3}(\tfrac{3}{7}z^{\frac{7}{3}} - \tfrac{3}{4}az^{\frac{4}{3}} + 3a^2z^{\frac{1}{3}}) + C$$
$$= \frac{g}{3b^3}z^{\frac{1}{3}}(\tfrac{3}{7}z^2 - \tfrac{3}{4}az + 3a^2) + C$$

5.

5. Substituiret man Statt z dessen Werth $a+bx^3$, so wird

$$\int g x^8 dx\,(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{g}{3b^3}\Big\{(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{3}{7}(a+bx^3)^2 - \tfrac{3}{2}a(a+bx^3) + 3a^2\right)\Big\} + C.$$

§. 334.

Aufgabe:

$\frac{a^2dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = a^2dx\,(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}$ zu integriren.

Auflösung:

1. Offenbar ist das gegebene Differential von der Form §. 331; da aber $\frac{0+1}{2x}$ keine ganze Zahl ist, so schaffe man x^2 in das erste Glied (§. 330.), so wird

2. $a^2x^0dx(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} = a^2x^{-3}dx\,(a^2x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$

3. Da nun $\frac{-3+1}{-2} = 1$ eine positive ganze Zahl ist, so läßt sich das gegebene Differential integriren;

4. Man setze also in §. 331. Nro. 4. $z = a^2x^{-2}+1$; ferner wird $n=-3$; $m=-2$; $\frac{n+1}{m}=1$; $\frac{n+1}{m} - 1 = 0$; $p=-\frac{3}{2}$; $g=a^2$; $b=a^2$; $a=1$; folglich

5. $a^2x^{-3}dx(a^2x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{a^2z^{-\frac{3}{2}}dz}{-2a^2}\,(z-a)^0$
$$= -\tfrac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}dz$$

6.

6. $\int a^2x^{-3}dx\,(a^2x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{z}} + C$

7. Substituirt man aus Nro. 4. statt z dessen Werth, so ist

$$\int a^2x^{-3}dx\,(a^2x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}} = \int \frac{a^2dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(a^2x^{-2}+1)}} + C$$

$$= \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} + C.$$

§. 331.

Aufgabe:

$\frac{a^2dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}} = a^2x^{-1}dx(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ zu integriren.

Auflösung:

1. Da sich dieses Differential weder aus §. 327, noch aus §. 328 integriren läßt, und
2. die Form vom Differentiale §. 331 nicht hat, indem in beyden Theilen des Binomiums die veränderliche Größe enthalten ist, so schaffe man solche aus einem Gliede weg (§. 329.), das ist;
3. $a^2x^{-1}dx\,(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^2x^{-\frac{3}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}$
4. Nun ist zwar das Differential von der Form §. 331. aber weil $\frac{-\frac{3}{2}+1}{1}$ keine ganze positive Zahl ist, so schaffe man die veränderliche Größe im Binomio aus dem zweyten in das erste Glied (§. 330.), so ist
5. $a^2x^{-\frac{3}{2}}dx\,(a+x)^{-\frac{1}{2}} = a^{-2}x^{-2}dx\,(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$

6.

6. Im letztern Differential ist $\frac{-2+1}{-1} = 1$, folglich läßt sich das Integral davon nach §. 331. Nro. 4. angeben.

7. Man setze $z = ax^{-1}+1$; $n = -2$; $m = -1$; $\frac{n+1}{m} = 1$; $\frac{n+1}{m} - 1 = 0$; $p = -\frac{1}{2}$; $g = a^2$; $b = a$; $a = 1$; folglich

8. $a^2x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a^2z^{-\frac{1}{2}}dz}{-a}(z-1)^0$

$= -az^{-\frac{1}{2}}dz$

9. $\int a^2x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}} = -2az^{\frac{1}{2}} + C.$

10. Substituirt man für z dessen Werth, so ist

$\int a^2x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{-a^2dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}}$

$= -2a\sqrt{(ax^{-1}+1)} + C.$

§. 336.

Aufgabe:

$\frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1}{2}dx(x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ zu integriren.

Auflösung:

1. Das gegebene Differential läßt sich weder aus §. 327 noch aus §. 328. integriren.

2. Man bringe solches auf die Form §. 331, das ist, eliminire die veränderliche Größe aus einem Gliede des Binomiums nach §. 329, nemlich

3. $\frac{1}{2}dx(x-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx(1-x)^{-\frac{1}{2}}$

4. Da aber $\frac{-\frac{1}{2}+1}{1}$ keine ganze positive Zahl ist, so bringe man nach §. 330. die veränderliche Größe aus dem zweyten in das erste Glied des Binomiums, das ist:

5. $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx\,(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-1}dx\,(x^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}$; wo aber wieder $\frac{-1+1}{-1}$ keine ganze positive Zahl ist, mithin das Differential nach §. 331 nicht integrirt werden kann.

6. Man muß also solches durch Annäherung integriren, das ist, man muß das Differential in eine convergirende Reihe eintheiliger Größen auflösen, die Integrale der Glieder bestimmen, und so viele davon nehmen, als es die Umstände der Aufgabe erfodern.

7. Nun ist $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\ldots\ldots$ (§. 139. III. Zus.); mithin

8. $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx\,(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx\,(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\ldots\ldots)$

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}\,dx+\frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}}\,dx+\frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}}dx+\ldots\ldots$

9. $\int\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(1-x)^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}+\ldots\ldots$

Zusatz: Nach dieser Methode lassen sich alle vieltheilige Differentiale von zusammengesetzten Potenzen, im Falle dieses aus §. 327, 328, 331 nicht angeht, durch Annäherung integriren; da aber x nicht allemal so beschaffen ist, daß die Reihe convergiret

oder,

oder, wenn sie auch convergiret, noch immer eine beträchtliche Anzahl der Glieder (außer die Reihe nähme sehr schnell ab), erfordert wird, so suchet man die Integrale von solchen Größen aus andern schon bekannten herzuleiten.

§. 337.

Lehrsatz:

$$\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = \int bx^0 dx (x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= b.\ \text{log. nat.}\,(x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)}) + C.$$

Beweis:

1. Man setze $\sqrt{(x^2 \pm a^2)} = z - x$; also $x^2 \pm a^2 = z^2 - 2zx + x^2$, und $2zx = z^2 \mp a^2$;
$x = \frac{1}{2}z \mp \frac{1}{2}a^2 z^{-1}$;
$dx = \frac{1}{2}dz \pm \frac{1}{2}a^2 z^{-2}dz$; $z - x = \frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}a^2 z^{-1} = \sqrt{(x^2 \pm a^2)}$ mithin

2. $$\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = \int \left(\frac{b(\frac{1}{2}dz \pm \frac{1}{2}a^2 z^{-2}dz)}{\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}a^2 z^{-1}}\right)$$
$$= \int \left(\frac{b(z^2 dz \pm a^2 dz)}{z^3 \pm a^2 z}\right) = \int \frac{bdz(z^2 \pm a^2)}{z(z^2 \pm a^2)} = \int \frac{bdz}{z}$$
$= b$ log. nat. $Z + C$ (§. 325.

3. Substituirt man für z dessen Werth, so ist

$$\int \frac{bdz}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = b.\log.\text{nat.}(x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)}) + C.$$

§. 338.

Lehrsatz:

$$\int b\,dx \sqrt{(x^2 \pm a^2)} = \int b\,x^0\,dx\,(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}bx\sqrt{(x^2 \pm a^2)} \pm \tfrac{1}{2}a^2\ b.\ \text{log. nat.}\,(x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)}) + C.$$

Be-

Beweis:

1. Offenbar ist $\int bdx\,(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} = \int(\frac{1}{2}bdx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}$

$$+ \int \tfrac{1}{2}\,bdx\,(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int \left(\tfrac{1}{2}bdx\,(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}bdx(x^2 \pm a^2)}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \int (\tfrac{1}{2}\,bdx\,(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}bx^2dx\,(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\pm \tfrac{1}{2}a^2bdx\,(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}})$$

2. Nun ist $\int(\frac{1}{2}bdx\,(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}bx^2dx\,(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \tfrac{1}{2}bx\sqrt{(x^2 \pm a^2)};$$

denn wenn man solche differentiirt, so giebt sie die beyden Differentiale.

3. $\int \pm \tfrac{1}{2}a^2bdx\,(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}} = \pm \tfrac{1}{2}a^2b$ log. nat. $(x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)})$ (§. 337.) folglich

4. $\int bdx\sqrt{(x^2 \pm a^2)} = \tfrac{1}{2}bx\sqrt{(x^2 \pm a^2)} \pm \tfrac{1}{2}a^2b$. log. nat. $(x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)}) + C.$

§. 339.

Lehrsatz:

$$\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2 \pm ax)}} = \int bx^{-\frac{1}{2}}dx(x \pm a)^{-\frac{1}{2}} = \int bx^{-1}dx\,(1 \pm ax^{-1})^{-\frac{1}{2}}$$

$$= b \log.\,\text{nat.}\,(x \pm \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(x^2 \pm ax)}) + C$$

Beweis:

1. Man setze $x = z - \frac{1}{2}a$; so wird $dx = dz$;

x^2

$x^2 = z^2 - az + \frac{1}{4}a^2$; $ax = az - \frac{1}{2}a^2$; mithin $\sqrt{(x^2+ax)} = \sqrt{(z^2 - \frac{1}{4}a^2)}$; folglich

2. $\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2+ax)}} = \int \frac{bdz}{\sqrt{(z^2-\frac{1}{4}a^2)}} = b \log.nat.(z + \sqrt{(z^2-\frac{1}{4}a^2)})$ (§. 337.); reſtituirt man wieder den Werth von z, ſo wird

3. $\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2+ax)}} = b.\log.nat.(x + \frac{1}{2}a + \sqrt{(x^2+ax)}) + C.$

4. Nun ſetze man auf's neue $x = z + \frac{1}{2}a$; $dx = dz$, $x^2 = z^2 + az + \frac{1}{4}a^2$; $ax = az + \frac{1}{2}a^2$; alſo $x^2 - ax = z^2 - \frac{1}{4}a^2$, mithin $\sqrt{(x^2-ax)} = \sqrt{(z^2-\frac{1}{4}a^2)}$.

5. $\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2-ax)}} = \int \frac{bdz}{\sqrt{(z^2-\frac{1}{4}a^2)}} = b \log.nat.(z + \sqrt{(z^2-\frac{1}{4}a^2)}) + C.$ (§. 337.); folglich der Werth für z geſetzet.

6. $\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2-ax)}} = b \log.nat.(x - \frac{1}{2}a + \sqrt{(x^2-ax)}) + C$

7. Aus Nro. 3. und 6 wird endlich

$$\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2 \pm ax)}} = b \log.nat.(x \pm \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(x^2 \pm ax)}) + C$$

§. 340.

Lehrſatz:

$$\int bdx \sqrt{(x^2 \pm ax)} = \int bx^{\frac{1}{2}} dx (x \pm a)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int bx dx (1 \pm ax^{-1})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{4}b(2x \pm a)\sqrt{(x^2 \pm ax)} - \tfrac{1}{8}a^2 b.\ log.\ nat.(x \pm \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(x^2 \pm ax)}) + C.$$

Be-

Beweis:

1. Man ſetze $x = z - \frac{1}{2}a$; alſo $dx = dz$;
$x^2 = z^2 - az + \frac{1}{4}a^2$; $ax = az - \frac{1}{2}a^2$, mithin
$x^2 + ax = z^2 - \frac{1}{4}a^2$, und $\sqrt{(x^2+ax)} = \sqrt{(z^2 - \frac{1}{4}a^2)}$,
folglich

2. $\int b\,dx\sqrt{(x^2+ax)} = \int b\,dz\,(z^2 - \frac{1}{4}a^2)^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2}bz\sqrt{(z^2 - \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{8}a^2b \log.nat.(z + \sqrt{(z^2 - \frac{1}{4}a^2)})$
(§. 338.); ſetzt man für z deſſen Werth, ſo iſt

3. $\int bdx\sqrt{(x^2+ax)} = \frac{1}{2}b\,(x+\frac{1}{2}a)\sqrt{(x^2+ax)} - \frac{1}{8}a^2b$
$\log.nat.(x + \frac{1}{2}a + \sqrt{(x^2+ax)}) + C.$

4. Nimmt man aufs Neue $x = z + \frac{1}{2}a$, ſo erhält man auf die nemliche Art
$\int bdx\sqrt{(x^2-ax)} = \frac{1}{2}b(x-\frac{1}{2}a)\sqrt{(x^2-ax)} - \frac{1}{8}a^2b$
$\log.nat.(x - \frac{1}{2}a + \sqrt{(x^2-ax)}) + C.$
Folglich beyde Werthe Nr. 3 und 4 geben.

5. $\int bdx\sqrt{(x^2 \pm ax)} = \frac{1}{2}b\,(x \pm \frac{1}{2}a)\sqrt{(x^2 \pm ax)} - \frac{1}{8}a^2b.$
$\log.nat.(x \pm \frac{1}{2}a + \sqrt{(x^2 \pm ax)}) + C.$

§. 341.

Lehrſatz:

$$\int \frac{bdx}{x\sqrt{(a^2 \pm x^2)}} = \int bx^{-1}dx\,(a^2 \pm x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -\frac{b}{a}\log.nat.\left(\frac{a + \sqrt{(a^2 \pm x^2)}}{x}\right) + C$$

Beweis:

1. Man ſetze $x = \frac{1}{z} = az^{-1}$; alſo $dx = -az^{-2}\,dz$
$x^2 = a^2z^{-2}$; $\sqrt{(a^2 \pm x^2)} = \sqrt{(a^2 \pm a^2z^{-2})}$
$= az^{-1}\sqrt{(z^2 \pm 1)}$; mithin

2. $\int \frac{bdx}{xV(a^2 \pm x^2)} = \int \frac{-abz^{-2}dz}{az^{-1}az^{-1}V(z^2 \pm 1)} =$

$= \int \frac{-abz^{-2}dz}{a^2z^{-2}V(z^2 \pm 1)} = -\frac{1}{a}\int \frac{bdz}{V(z^2 \pm 1)} =$

$= -\frac{b}{a}\log.\,nat.(z + V(z^2 \pm 1)) + C.$ (§. 337.)

3. Restituiret man den Werth von $z = \frac{a}{x}$ und

$V(z^2 \pm 1) = \frac{V(a^2 \pm x^2)}{az^{-1}} = \frac{V(a^2 \pm x^2)}{x}$

4. $\int \frac{bdx}{xV(a^2 \pm x^2)} = -\frac{b}{a}\log.\,nat.\left(\frac{a}{x} + \frac{V(a^2 \pm x^2)}{x}\right) + C.$

$= -\frac{b}{a}\log.\,nat.\left(\frac{a + V(a^2 \pm x^2)}{x}\right) + C.$

§. 342.

Lehrsatz:

$\int \frac{bdx}{a^2 - x^2} = \int bx^0\,dx\,(a^2 - x^2)^{-1}$

$= \frac{b}{2a}\log.\,nat.\left(\frac{a+x}{a+x}\right) + C.$

Beweis:

1. Man zerlege den Bruch $\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{(a+x)(a-x)}$

in zwey Brüche $\frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x}$; das ist

$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x} = \frac{aA - Ax + aB + Bx}{a^2 - x^2}$,

$1 = aA + aB + (B - A)x$, und

$0 = aA + aB - 1 + (B - A)x$; folglich (§. 189.)

aA

$aA+aB-1=0$; und $B-A=0$, also $B=A$, und
$aA+aA-1=0$; mithin $A=\frac{1}{2a}$, folglich

2. $\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a(a+x)}+\frac{1}{2a(a-x)}$;

3. $\int\frac{bdx}{a^2-x^2}=\int\left(\frac{bdx}{2a(a+x)}+\frac{bdx}{2a(a-x)}\right)$

$=\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{a+x}-\frac{b}{2a}\int\frac{-dx}{a-x}$

$=\frac{b}{2a}$ log.nat. $(a+x)-\frac{b}{2a}$ log.nat. $(a-x)$

$=\frac{b}{2a}$ log. nat. $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)+C$. (§. 228.)

§. 343.

Lehrsatz:

$\int\frac{bdx}{x^2-a^2}=\int bx^0dx\,(x^2-a^2)^{-1}=\frac{b}{2a}$ log. nat. $\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+C$.

Beweis:

1. Man setze $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x-a}=\frac{Ax-aA+Bx+aB}{x^2-a^2}$

$1=aB-aA+(A+B)x$, und
$0=aB-aA-1+(A+B)x$; mithin (189.)
$aB-aA-1=0$; $A+B=0$; also $B=-A$, und
$-aA-aA-1=0$; $2aA=-1$; $A=-\frac{1}{2a}$;
$B=\frac{1}{2a}$ folglich

2. $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}$ und

3. $\int \frac{bdx}{x^2-a^2} = \int\left(\frac{bdx}{2a(x-a)} - \frac{bdx}{2a(x+a)}\right)$

$= \frac{b}{2a}$ log. nat. $(x-a) - \frac{b}{2a}$ log. nat. $(x+a) + C$

$= \frac{b}{2a}$ log. nat. $\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C.$

§. 344.

Lehrsatz:

$\int \frac{bdx}{ax \pm x^2} = \int bx^{-1}dx(a \pm x^1)^{-1} = \int bx^{-2}dx(ax^{-1} \pm 1)^{-1}$

$= -\frac{b}{a}$ log. nat. $\left(\frac{a \pm x}{x}\right) + C = \frac{b}{a}$ log. nat. $\left(\frac{x}{a \pm x}\right) + C$

Beweis:

$\int bx^{-2}dx(ax^{-1} \pm 1)^{-1} = \int \frac{bx^{-2}dx}{ax^{-1} \pm 1} =$

Es wird nämlich hier mit $-a$ multipliciert und dividiert

$= -\frac{b}{a}\int \frac{-ax^{-2}dx}{ax^{-1} \pm 1} = -\frac{b}{a}$ log. nat. $(ax^{-1} \pm 1) + C. =$

$= -\frac{b}{a}$ log. nat. $\left(\frac{a \pm x}{x}\right) + C.$ (§. 325.)

$= \frac{b}{a}$ log. nat. $\left(\frac{x}{a \pm x}\right) + C$ (§. 232. VI. Zus.)

§. 345.

Lehrsatz:

$\int \frac{bdx}{x^2-ax} = \int bx^{-1}dx(x-a)^{-1} = \int bx^{-2}dx \times (1-ax^{-1})^{-1}$

$=$

$$= \frac{b}{a} \log.\text{nat.}\left(\frac{x-a}{x}\right) + C = -\frac{b}{a} \log.\text{nat.}\left(\frac{x}{x-a}\right) + C$$

Beweis:

$$\int bx^{-2}dx(1+ax^{-1})^{-1} = \int \frac{bx^{-2}dx}{1-ax^{-1}} =$$

$$= \frac{b}{a}\int \frac{ax^{-2}dx}{1-ax^{-1}} = \frac{b}{a} \log.\text{nat.}(1-ax^{-1}) + C +$$

$$= \frac{b}{a} \log.\text{nat.}\left(\frac{x-a}{x}\right) + C. \text{ (§. 325.)}$$

$$= -\frac{b}{a} \log.\text{nat.}\left(\frac{x}{x-a}\right) + C. \text{ (§. 232. VI. Zuf.}$$

§. 346.

Aufgabe:

Das Integral von $x^n dx (a+bx^m)^p$ durch das bekannte Integral von $x^r dx (a+bx^m)^p$ bestimmen, wenn $(n-r):m$ eine positive ganze Zahl ist.

Die Auflösung sowohl, als der Beweis ist in der VIII. Tabelle auseinander gesetzet.

§. 347.

Aufgabe:

$\int -Ax^6dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ suchen.

Auflösung:

1. Offenbar ist $x^6dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ unter der Form $x^n dx (a+bx^m)^p$ enthalten.

2. Unter den bisher entwickelten Integralen, hat $\int bx^0dx(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 337.), oder was einerley $\int bx^0dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ die nemliche Form mit $\int x^r dx (x^2+c^2)^p$ (§. 346.);

3. Da

3. Da nun $(n-r) : m = (6-0) : -2 = -3$ ist, so läßt sich das Integral von $x^6 dx (x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ aus dem bekannten von $x^0 dx (x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ entwickeln; es ist nemlich

4. $n=9$; $r=0$; $m=2$; $p=-\frac{1}{2}$; mithin $r+n-m=5=f$; $r+n+mp=6=g$;

5. Ferner $a=c^2$; und $b=1$, mithin §. 346. III.

$$\int x^6 dx (x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} x^5 (x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{6.4} c^2 x^3 (x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{5.3}{6.4.2} c^4 x (x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5.3.1}{6.4.2} c^6 \int x^0 dx (x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} + C$$

6. Nun ist $\int x^0 dx (x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{log. nat.} (x+\sqrt{})(x^2+c^2)$ (§. 337.) folglich

7. $$\int -Ax^6 dx (x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6} Ax^5 (x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{6.4} Ac^2 x^3 (x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5.3}{6.4.2} Ac^4 x (x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{5.3.1}{6.4.2} Ac^6 \text{ log. nat.} (x+\sqrt{}(x^2+c^2)) + C$$

§. 348.

Aufgabe:

Das Integral von $x^n dx (a+bx^m)^p$ aus dem bekannten von $x^r dx (a+bx^m)^p$ bestimmen, wenn $(n-r) : m$ eine negative ganze Zahl ist.

Auflösung:

1. Es sey $(n-r) : m = -q$, wo also q eine ganze positive Zahl ausdrückt, so ist $n-r = -mq$; und

$r-n=mq$; mithin $(r-n):m=q$ eine positive ganze Zahl.

2. Man verwechsle daher das Differential, dessen Integral man sucht, mit jenem, dessen Integral bekannt ist, und bestimme das Bekannte aus dem Unbekannten, das ist:

3. Man subsummire das Differential, dessen Integral bekannt ist, unter $x^n dx(a+bx^m)^p$, und das gesuchte Integral unter $x^r dx(a+bx^m)^p$.

4. Construire aus §. 346 die Formel, aus welcher man am Ende durch Uebersetzung das unbekannte Integral vermittels des gegebenen erhält.

§. 349.

Aufgabe:

Man soll $x^{-\frac{3}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$ durch Hilfe des bekannten Integrals $\int x^{\frac{1}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$ integriren.

Auflösung:

1. Da $(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}):1=-2$ eine negative ganze Zahl ist, so setze man nach §. 347. das bekannte Integral $\int x^{\frac{1}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}=\int x^n dx(a+bx^m)^p$,

2. Das gesuchte Integral $\int x^{-\frac{3}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}=\int x^r dx(a-bx^m)^p$

3. Da nun $(n-r):m=(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}):1=2$, so ist nach §. 346 das erste Integral durch das zweyte bestimmt.

4. Man setze also $n=\frac{1}{2}$; $r=-\frac{3}{2}$; $m=1$; $p=\frac{1}{2}$, mithin $1+n-m=\frac{1}{2}=f$; $1+n+mp=2=g$;

5. Fer-

5. Ferner $a=1$; $b=1-1$; folglich §. 346. II.

6. $\int x^{\frac{1}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}-$
$-\frac{1}{8}\int x^{-\frac{3}{2}}dx(1-x)^{\frac{3}{2}}$

7. Aus dieſer Gleichung beſtimme man das geſuchte Integral durch Ueberſetzung (§. 347. Nr. 4.), das iſt:

8. $\int x^{-\frac{3}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}=-4x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}$
$(1-x)^{\frac{3}{2}}-8\int x^{\frac{1}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$

Wo offenbar das geſuchte Integral beſtimmt iſt, im Falle $\int x^{\frac{1}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$ bekannt iſt.

§. 350.

Aufgabe:

$\int x^{n}dx(a+bx^{m})^{\frac{p}{q}}$ durch Hilfe von $\int x^{r}dx(a+bx^{m})^{\frac{p}{q}}$ beſtimmen, wenn $(n-r):m$ eine ganze poſitive oder negative, ferner $p-q$ eine ganz poſitive Zahl iſt.

Die Auflöſung ſammt dem Beweiſe iſt in der IX. Tabelle entwickelt.

§. 351.

Aufgabe:

$\int x^{n}dx(a+bx^{m})^{\frac{p}{q}}$ durch das bekannte Integral $\int x^{r}dx(a+bx^{m})^{\frac{p}{q}}$ zu entwickeln, wenn $\frac{n-r}{m}$ eine ganze poſitive oder negative, und $p-q$ eine negative ganze Zahl iſt.

Auflöſung:

Man verfahre auf ähnliche Art wie §. 348, das iſt, man verwechsle wieder das Geſuchte mit dem Gegebenen.

benen, und bestimme letzteres nach §. 350 aus dem erstern oder gesuchten. Am Ende erhält man durch Uebersetzung das gesuchte Integral.

I. Zusatz: Allemal läßt sich $\int x^n dx(a+bx^m)^p$ durch $\int x^r dx(a+bx^m)^q$ bestimmen, wenn $\frac{n-r}{m}$ und $p-q$ ganze positive oder negative Zahlen sind.

II. Zusatz: Wenn in einer Auflösung $g(g+m)(g+2m)\ldots = 0$ wird, so muß man in den Differentialen des gesuchten sowohl als des bekannten Integrals erst die veränderliche Größe in das andere Glied des Binomiums schaffen (§. 330.), dann erst die Reduction vornehmen.

§. 352.

Aufgabe:

$x^2dx(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$ zu integriren.

Auflösung:

1. $x^2dx(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$ läßt sich aus §. 327, 328 und 331 nicht integriren, und da unter den Lehrsätzen §. 337—345 nirgend $\frac{3}{2}$ der Exponent des Binomiums ist, so kan das Integral auch nicht durch §. 346 oder 348 unmittelbar bestimmt werden; indessen ist es doch von der Form $x^n dx(a+bx^m)^p$.

2. $b^0xdx(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 337.) oder was einerley ist, $x^0dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ ist von der Form: $x^r dx(a^2+bx^m)^q$;

3. Nun ist $\frac{n-r}{m} = \frac{2-0}{2} = 1$, und $p-q = \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = 2$; folglich läßt sich aus §. 350 das gegebene Differential

tial durch Hilfe des bekannten Integrals $\int x^0 dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ bestimmen.

4. Es ist nemlich $n=2$, $r=0$, $m=2$; $p=\frac{3}{2}$; $q=-\frac{1}{2}$, ferner $a=-1$; $b=1$; und $1+n=3=g$; und weil $p-q=2$, so ist §. 350. II.

5. $\int x^2 dx(x^2-1)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}x^3(x^2-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^5(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+$
$+\frac{1}{3}\int x^6 dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}+C.$

6. Vergleicht man $\int x^6 dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ mit dem bekannten $\int x^0 dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, so ist $\frac{6}{2}=3$, folglich läßt sich ersteres durch das letztere bestimmen (§. 346.)

7. Es ist nemlich aus §. 347.

$$\int x^6 dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}x^5(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{6.4}x^3(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{5.3}{6.4.2}x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{5.3.1}{6.4.2}\int x^0 dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}+C=$$
$$=\frac{1}{6}x^5(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{6.4}x^3(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{5.3}{6.4.2}x$$
$$(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{5.3.1}{6.4.2}\text{log. nat.}(x+\sqrt{(x^2-1)})+C.$$

8. Folglich

$$\int x^2 dx(x^2-1)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{5}x^3(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}x^5(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\frac{1}{5.3}x^5(x^2-a)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6.4}x^3(x^3-x)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{6.4.2}x$$
$$(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{3.1}{6.4.2}\text{log. nat.}(x+\sqrt{(x^2-1)})+C.$$

Anmerkung: Die Regeln für die Integration der Differentiale von Exponentialgrößen, von mehrern unbekannten, und der Differentiale höherer Ordnungen zu entwickeln, würde für gegenwärtiges Lehrbuch zu weitläufig seyn.

An-

Anhang

von den

in verſchiedenen Ländern, vorzüglich in Baiern üblichen Maaße, Gewichte und Münzen.

I. Abtheilung.

Vom Maaße.

I.

Vom Längenmaaße.

A.

Vom Längenmaaße überhaupt.

1. Um eine Länge zu beſtimmen, bedient man ſich verſchiedener Maaße, eines Fußes, einer Elle, einer Klafter, oder Meile, je nachdem die zu beſtimmende Länge kleiner oder größer iſt.

2. Das Verhältniß des baieriſchen zu dem ehemaligen königlichen Pariſer Fuße iſt = 1000 : 1113, und wurde durch die baieriſche Akademie mit aller Schärfe beſtimmt, wenn man nemlich den Pariſer Fuß in 144 Linien theilt, ſo hält der baieriſche Fuß nach obigem Verhältniſſe 129,38 ſolche Theile; Hr. Legations-Sekretär Beigel fand bey wiederholter Prüfung den baieriſchen Fuß 129,383. Man ſehe churpfalzbaieriſches Regierungs-Intelligenzblatt V. St. 1800. S. 79, und Zachs monatliche Korreſpondenz I. Band S. 619. Hr. Prof. Schiegg verglich das Muttermaaß erſt mit dem

dem Métre definitif, welchen die Direction des topographiſchen Bureau's aus Paris erhalten hatte, und dann mit der bey der königl. Akademie in München aufbewahrten Toiſe, und fand, nach gehöriger Correction in Hinſicht der verſchiedenen Temperaturen, obiges Verhältniß 1000 : 1113 aufs genaueſte beſtättiget.

3. Die baieriſche Elle hält nach Hrn. Beigels Angabe genau 370,16 Pariſer Linien; mithin im baieriſchen Duodecimalmaaße 2 Fuß, 10 Zoll, 3,988 Linien, und im baieriſchen Decimalmaaße 2 Fuß, 8 Zoll, 6,108 Linien.

4. Man theilet die Elle in halbe, Drittel- Viertel-Ellen u. ſ. w.

5. Eine baieriſche Klafter hält genau 6 baieriſche Fuß.

B.

Eintheilung des Fußmaaßes überhaupt.

a. Im Duodecimalmaaße.

Fuß	Zoll	Linien	Scrupl
1 Fuß	12	144	1728
	1 Zoll	12	144
		1 Linie	12
			Scrupl

b. Im Decimalmaaße.

Fuß	Zoll	Linien	Scrupl
1 Fuß	10	100	1000
	1 Zoll	10	100
		1 Linie	10
			Scrupl

C. Ver-

C.

Verhältnisse verschiedener Fuß- und Ellenmaaße nach dem Pariser Fuß zu 144 Duodec. Linien.

Namen der Länder und Oerter.	1 Fuß hält Par. Linien.	Logarithmus.		1 Elle hält an Par. Lin.	Logarithmus.	
Amsterdam	125,5	2,0986937	a	306,0	2,4857214	a
. . .	125,48	2,0985745	b	305,39	2,4848548	b
Anspach .	132,92	2,1235903	e	276,78	2,4421347	e
Augsburg .	131,3	2,1182647	c	gr. 270,2	2,4316853	a
				. 268,8	2,4294293	c
. . .	131,29	2,1182316	d	kl. 262,6	2,4192947	a
				. 260,0	2,4149733	c
Baiern u. die	129,38	2,1118671		370,16	2,5683895	
Oberpfalz .	129,383	2,1118772				
Berlin und in Preußen überh.	139,13	2,1434208	f	296,0	2,4712917	f
Breslau .	127,65	2,1060208	b	255,3	2,4070508	a
Brüßel . .	. . . .	. . . . .		gr. 307,8	2,4882686	a
				kl. 303,4	2,4820156	a
Dänemark	139,13	2,1434208	a	278,26	2,4444508	a
Dresden .	125,5	2,0986437	a	250,9	2,3995007	a
England .	135,158	2,1308419	h	kl. 405,5	2,6079909	a
				gr. 506,9	2,7049223	b
Eichstädt .	134,784	2,1296385	g	342,6	2,5347874	g
Frankf. am M	127	2,1038037	a	239,2	2,3787612	a
Frankreich Par. Fuß .	144	2,1583625	i	526,8	2,7216458	a
neues Maaß Mètre .	443,296	2,6466938	i	527,04	2,7218436	i
Griechenland alter Fuß .	135,80	2,1328998		Nach Auzout	de la Lande	
. . .	136,56	2,1353235		Nach le Roy	Astron. §. 2639	
Hamburg .	127	2,1038037	a	254	2,4048337	a

Namen

Namen der Länder und Oerter.	1 Fuß hält Par. Linien	Logarithmus.		1 Elle hält Par. Linien.	Logarithmus.	
Leipzig						
Baurfuß . .	123,3	2,0979511	o	250,6	2,3989811	a
gemein. Fuß	125,1	2,0972573	o	250,58	2,3989464	b
Mannheim	128,65	2,1094098	k	247,3	2,3932241	k
. . . .	128,48	2,1088355	l	246,77	2,3922924	l
Nürnberg .	134,88	2,1299476	e	291,08	2,4640124	e
. . . .	134,784	2,1296385	g	292,8	2,4665711	b
Regensburg	139	2,1430148	m	359,083	2,5551948	m
Rheinländischer Fuß .	139,13	2,1434208		Nach Eisenschmid de Pond. et Mens.		
. . . .	139,183	2,1435862		Nach Lulofs de la Lande Astron. §. 2639.		
Rom alter Fuß	130,9	2,1169396		Mem. de l'ac. de Paris an. 1757		
neuer Palmo	99,03	1,9957668		Nach Boscowich de la Lande Astron. §. 2639.		
Rußland . .	238,6	2,3776704	a	315,4	2,4988617	a
Salzburg . .	131,5	2,1189258	n	in Seide 355	2,5502284	k
				in Leinw. 445,8	2,6491401	k
Schweden .	131,6	2,1192559	a	263,2	2,4202859	a
Tyrol	148,11	2,1705844	a	356,47	2,5520230	a
Wien u. ganz Oestreich .	140,13	2,1465311	a	345,42	2,5382475	a
Würzburg .	129,522	2,1123435	p	257,3	2,4104398	o

Anmerkung: Die in der Spalte neben den Logarithmen gesetzten Buchstaben beziehen sich auf die Quellen, aus welchen die Angaben genommen sind.

a. Vega logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung 1800.

b. Grüson Grundriß der reinen und angewandten Mathematik I. Theil S. 261.

D. Vom

c. Hr. Hdschel theilte mir diese Bestimmungen mit.

d. Ammanns geograph. Ortsbestimmungen im östlichen Schwaben, 1. Abschn. N. 6.

e. Ueber die Maaße und Gewichte im Fürstenthume Ansbach, mit Bezug auf die Nürnberger Maaße und Gewichte in Zachs monatl. Correspondenz April und May 1804.

f. Eytelwein Vergleichungen der in den königl. preuß. Staaten eingeführten Maaße und Gewichte. Preuß. Maß- Gew. Ordnung. 1816. K. v.

g. Hr. geistl. Rath und Prof. Pickel untersuchte die eichstädtischen Maaße und Gewichte, und theilte mir seine Resultate mit.

h. Tobias Mayr praktische Geometrie I. Band.

i. Instruction sur les Mesures et Poids nouveaux par Marthurin-Jacques Brisson. An. VIII. und Vega's Aufsatz in Zachs monatl. Correspondenz I. Band. Seite 460.

k. Schulze logarithmische Tafeln. Berlin 1777.

l. Münchner chronologisch-genealogischer Handkalender fürs Jahr 1797. Seite 101.

m. Hr. Placidus Heinrich, Benedictiner und Professor der Naturlehre zu St. Emmeram untersuchte im Reichsstifte die Regensburger Elle, Fußmaaß, Gewichte und Getränkmaaß, und theilte mir seine Resultate mit. Metr.

n. Einer Nachricht von Salzburg zufolge.

o. Gerardts allgemeiner Contrist.

p. Scharolds Beschreibung von Würzburg und der umliegenden Gegend. Seite 78.

D. Vom

D.

Vom Meilen-Maaße.

1. Das gröſste übliche Längenmaaß iſt die Meile, und und zwar im Deutſchlande die geographiſche, oder ſogenannte deutſche Meile, deren 15 einen Meridiangrad ausmachen.

2. Für Baiern ſetzet Hr. Helfenzrieder in ſeiner Geodäſie Seite 327 einen Meridiangrad 342432 Pariſer Fuß, mithin $\frac{1}{15}$ Grad, oder eine deutſche Meile in Baiern 22828,8 Par. Fuß, oder 25407,5 baieriſche Fuß.

3. Hr. v. Riedl in der Einleitung zu ſeinem baieriſchen Atlas nimmt die deutſche Meile für Baiern 22826,6 Par. Fuß = 25406 baieriſche Fuß, mithin eine ſogenannte Stunde zu 12703 baier. Fuß, und in dieſer Entfernung von einander wurden die baieriſchen Chauſsée-Stundenſäulen geſetzt. Ehemal betrug die Entfernung ſolcher Stundenſäulen von einander 13000, mithin die alte Chauſsée-Meile 26000 baieriſche Fuß.

4. Nach dem mittleren Erdhalbmeſſer beträgt ein mittlerer Erdgrad 57030 Toiſen, folglich eine geographiſche Meile 3802 Toiſen = 22812 Par. Fuß = 25389,76 baieriſche Fuß. Lorenz angewandte Math. II. Abth. Geogr. §. 89.

5. Hr. Klügel ſetzet den mittleren Erdgrad 57173,5 Par. Toiſen, mithin die geographiſche Meile 3811,6 Pariſer Toiſen = 22869,6 Pariſer Fuß = 25453,9 baieriſme Fuß. Bode Anleitung zur allgemeinen Kenntniß der Erdkugel. §. 154.

6. Vermöge der neueſten franzöſiſchen Vermeſſungen beträgt der Quadrant eines Meridians 30784440 Pariſer Fuß.

Fuß, mithin der 90ste Theil, oder ein Grad 342049,33 Pariſer, oder 380701 baieriſche Fuß, und die geographiſche oder deutſche Meile 3800,55 Toiſen=22803,29 Pariſer = 25380,076 baieriſche Fuß. Brusson Inſtruction sur les Mesures et Poids etc.

E.

Verhältniß verſchiedener Meilen zur geographiſchen nach Klügel von 3811,6 Toiſen.

Namen der Meilen in verſchiedenen Ländern.	100 Meilen betragen an geographiſchen Meilen.	Jede Meile hält Pariſer Fuß.	Gehen auf einen Meridiangrad.	Verhältniß der Quadratmeile, die geograph. =1000 geſetzt.
Arabiſche . . .	26,470	6053,5	56,67	14273
Baieriſ. Chauſsée-Meile. .	99,812	22826,6	15,028	1003,7
Böhmiſche . . .	93,052	21270,0	16,12	1155
Däniſche. . . .	101,430	23197,2	14,79	972
Deutſche alte .	59,860	13722,1	25,00	2778
neue kleine. .	84,527	19330,9	17,74	1399
geograph. nach Klügel . .	100,000	22869,6	15,00	1000
. . nach der neuen franz. Verm.	99,7105	22803,29	15,0436	1005,8
Franzöſiſche alte Leuka . .	29,762	6806,43	50,50	11334
Franzöſiſche neue Lieues $\frac{1}{25}$ Gr.	59,826	13681,97	25,0727	2794
neue Seemeilen v. $\frac{1}{20}$ Gr.	74,7825	17102,47	20,0582	1788
neue v. $\frac{1}{20}$ Centeſimalgrad	67,304	15392,22	22,286	2208
Großbrittaniſche alte. .	31,512	7206,75	47,60	10070

= 7408,3 Meter.

1 Geo. □M. = 5680 Hektaren.
1 □ Myriameter = 1,82 g. □M.

Namen der Meilen in verschiedenen Ländern.	100 Meilen betragen an geograph. Meilen.	Jede Meile hält Pariser Fuß.	Gehen auf einen Meridiangrad.	Verhältniß der Quadratmeile, die geograph. =1000 gesetzt.
Großbrit. neue zu 1760 Yards	21,702	4963,23	69,12	21234
Seemeilen. .	24,999	5717,13	60,00	16000
Leagues. . .	73,729	17150,40	20,00	1778
Holländische . .	78,948	18055,12	19,00	1604
Italienische . .	24,992	5717,13	60,00	16000
Jüdische alte, Sabatherweg zu 200 jüd. biblischen Ellen	14,881	3403,22	100,80	45158
Londner v. 1666⅔ Yards. . .	20,549	4699,39	73,00	23684
Nürnbergische .	114,110	26186,5	13,10	762,7
Oestr. Postmeilen	102,123	23355,00	14,69	959
Preußische . . .	104,390	23873,76	14,37	918
Portugiesische .	83,332	19057,44	18,00	1440
Römische zu 8 olymp. Stadien	19,864	4543,75	75,50	25334
Rußische Meilen oder Werstа .	14,378	3288,20	104,30	48349
Sächs. Polizeym.	122,050	27912,00	12,29	671
Schwäbische . .	124,940	28587,00	12,00	646
Schwedische . .	144,090	32953,50	10,41	480
Schweizerische .	112,520	25795,25	13,30	786
Spanische . . .	56,329	12882,00	26,63	3152
Stadien griechisch-olymp.	2,498	571,23	600,00	1600000
Türkische gewöhnliche, oder Berri	22,497	5144,94	66,67	19755
Seemeilen. .	17,662	4039,21	86,40	33178
Ungarische . . .	112,530	25734,35	13,33	790

Am

Anmerk. Außer den schon angeführten Quellen zur Bestimmung der baierischen und neuen französischen Meilen bestimmte ich die östreichischen Postmeilen aus Vega's logar. Handb. Alle übrigen Angaben sind aus Tobias Mayr's pract. Geom. IV. Th. §. 11. und Bode's Anleitung zur Erdkunde §. 244. genommen.

II.

Vom Flächenmaaße.

1. Kleinere Flächen werden durch Quadratfuße, Quadratzolle und so weiter, das ist, durch Flächen gemessen, die in der Länge und Breite einen Fuß, oder einen Zoll halten.

2. Bey größern Flächen dient zum Maaße das Juchart, oder Tagwerk, welches in Baiern nach einem Gesetze vom Jahre 1616 genau 40000 baierische Quadratfuße hält.

3. Das größte Flächenmaaß ist endlich die Quadratmeile, deren Größe sowohl, als die Verhältnisse in verschiedenen Ländern aus der vorhergehenden Tabelle bestimmt werden können.

4. Eintheilung des Quadratfußes.

a. Im Duodecimalmaaße.

□ Fuß.	□ Zoll.	□ Linien.	□ Scrupel.
I.	144	20736	2985984
	I.	144	20736
		I.	144
			□ Scrupel

b. Im Decimalmaaße.

□ Fuß.	□ Zoll.	□ Linien.	□ Scrupel.
1.	100	10000	1000000
	1.	100	10000
		1.	100
			□ Scrupel

5. Das neue Flächenmaaß in Frankreich heißt Are, und hält 947,681746 Pariser Quadratfuß; Décare ist = 10 Ares; Déciare = $\frac{1}{10}$ Are; und Centiare = $\frac{1}{100}$ Are = 9,47681746 Par. Quadratfuß, welches das Quadrat vom Mètre ist. (Brusson Instruction etc.)

III.

Vom Körpermaaße.

Zum Körpermaaße dienen:

1. Der Cubikfuß.
2. Die Cubikmeile, welche das größte Körpermaaß ist.
3. Die Klafter als Holzmaaß, welche in Baiern 6 Schuhe im Quadrate hält, und wo die Scheitter $3\frac{1}{2}$ baierische Schuhe lang seyn sollen, so, daß also eine Klafter Holzmaaß 126 Cubikfuß hält.
4. Verschiedene Früchtenmaaße, als Getreid- Getränk- Maaß.
5. Einige Körper werden nur gezählt, z. B. das Papier.
6. Einige hingegen nach dem Gewichte bestimmet.

7. Eine

7. Eintheilung des Cubikfußes.

a. Im Duodecimalmaaße.

Cubikfuß.	Cubikzoll.	Cubiklinien.	Cubikſcrupel
1.	1728	2985984	5159780352
	1.	1728	2985984
		1.	1728

b. Im Decimalmaaße.

Cubikfuß.	Cubikzoll.	Cubiklinien.	Cubikſcrupel
1.	1000	1000000	1000000000
	1.	1000	1000000
		1.	1000

A.

Baieriſches Getränkmaaß.

Auf dem Rathhauſe in München iſt ein Commiſſionsprotokoll vom Jahre 1746 hinterlegt, in welchem der Vorſchlag gemacht, und dieſer von der höchſten Stelle genehmigt wurde, daß in Zukunft die baieriſche Maß genau 43 baieriſche Decimal-Cubikzolle oder 74,304 baieriſche Duodecimal-Cubikzolle halten ſoll. Das Mûttermaaß beſteht aus einem Cylinder von Meſſing mit dem Stadtwappen nebſt der Aufſchrift: *Muetter einer Bayrischen Maſs. 43 cubische Decimalzoll innhaltent.* Die Höhe dieſes Cylinders hält 6,969, der Durchmeſſer der Grundfläche 2,803 baieriſche Decimalzoll, alſo der körperliche Innhalt 43,0036 baieriſche Decimalcubikzolle; man theilt ſolche in halbe Maße oder Seidel, ferner in $\frac{1}{4}$ Maß oder Quartl, und $\frac{1}{8}$ Maß

Maß oder Achterl; der baierische Eimer hält 60 Maße, mithin 2580 baierische Decimal-Cubikzolle, oder 4458,240 baierische Duodecimal-Cubikzolle; der Visier-Eymer hingegen, wie er an die Wirthe abgegeben wird, hält 64 Maß, mithin 2752 baier. Dec. Cub. Zolle = 4755,456 baier. Duod. Cubikzolle.

B.

Größe verschiedener Getränkmaaße in französischen Duodecimal-Cubikzollen.

Maaße verschiedener Oerter.	Franzöſiſ. Duodec. Cubik-Zoll.	Logarithmus.	
Ansbach. Eymer zu 66 Maß	4511	3,6542728	e
Maß . . .	68,348	1,8347258	e
Augsburg. Eymer zu 60 M.	3234,205	3,5097737	c
zu 64 Maß	3449,818	3,5377962	c
Baiern. Maß	53,8923	1,7315267	
Schenk-Eymer zu 60 Maß	3233,538	3,5096771	
Visier-Eymer zu 64 Maß	3449,1072	3,5377067	
Berlin. Quart	59	1,7708520	f
Wein-Eymer zu 64 Quart	3776	3,5770320	f
Bierdhmchen zu 24 Quart	1416	3,1510633	f
Eichstädt. Wein-Eymer zu 64 Weinmaß.	3546,3	3,5497755	g
Bier-Eymer zu 64 Biermaß	3878,6	3,5886750	g
Frankreich. Ehemalige Pinte	48	1,6812412	i
Neues Maß Litre = Decimètre cube.	50,412416	1,7025374	i
Mannheim. Maß . .	86,228	1,9356383	l
Ohm zu 48 Maß . .	4138,944	3,6168896	l
Fuder zu 10 Ohm . .	41389,44	4,6168896	l
Nürnberg. Stadt-Eymer zu 64 Visiermaß und 68 Schenkmaß . . .	3714,538	3,599049	p

1 Quart = 64 C. Zoll.
1 Eimer = 60 Quart.

Maaße verschiedener Oerter.	Franzöſſ. Duodec. Cub. Zolle.	Logarithmus.	
Regensburg. Köpfel . .	42	1,6232493	m
Weineymer großer zu 88 Köpfel . . .	3696	3,5677320	m
. . . . Bergeymer zu 68 Köpfel . . .	2856	3,4557582	m
Viereymer zu 64 Köpfel .	2688	3,4294293	m
Wien und ganz Oeſtreich Eymer zu 40 Maaß .	2853,56	3,4553875	a
Würzburg. Eymer zu 64 M.	3783,0144	3,5778380	p

Anmerkung. Die in der letzten Spalte befindlichen Buchſtaben beziehen ſich wieder auf die Angabsquellen, die beym Längenmaaße Tab C. alle angezeigt ſind.

Anmerk. zu c. Der Augsburger Getreidviertling, oder $\frac{1}{32}$ Schaaf, welcher 6 Schenkmaß hält, beſteht nach Hrn. Hdſchels Angabe aus einem Cylinder, deſſen Hdhe ſowohl, als Durchmeſſer der Baſis = 0,68 Augsburgerfuß iſt; aus dieſen berechnete ich die in der Tabelle angezeigte Grdße des Augsburger Eymers.

C.

Baieriſches Getraidmaaß.

Das für Baiern ſowohl, als die obere Pfalz und Pfalz Neuburg vorgeſchriebene Getraidmaaß iſt das ſogenannte Münchner Schäffel. Das Mutterſchäffel, welches auf dem Rathhauſe zu München aufbewahrt wird, beſteht aus einem kupfernen abgekürzten Kegel. Die Grdße dieſes Maaßes mit Schärfe zu beſtimmen, iſt ſeiner Form wegen immer ſehr ſchwer; die bisher an-

gestellten Versuche geben die Größe auf 208 oder 208½ Münchner Maß, das ist, zwischen 8944 und 8965,5 baierischen Decimal-Cubikzollen, oder zwischen 15455,232 und 15492,384 baierischen Duodecimal-Cubikzollen an.

I. Der Hr. geistliche Rath Westenrieder in der Beschreibung der Stadt München, vermuthlich nach Versuchen der baierischen Akademie, setzet das Münchner Schäffel 208½ baierische Maß, oder = 8965,5 baierische Decimal-Cubikzolle.

II. Von Forstnern, baierischer Artillerie-Oberst-Lieutenant, fand den 1. Sept. 1779 durch Versuche das Münchner Schäffel 208 Maß, oder 8944 baierische Dec. Cub. Zolle, und ließ diese Bestimmung in das Münchner Wochenblatt einrücken.

III. Hr. Vicelin Schlögel, Professor der Mathematik zu Ingolstadt, bestimmte den Inhalt auf 208½ baierische Maß. Die Stelle eines Schreibens an mich vom 14. Jän. 1802, welche sich darauf bezieht, ist folgende: „Das Getraidmaaß hängt ganz „von dem Getränkmaaße ab; denn 208½ baier. Ge„tränkmaß machen genau ein Münchner Schäffel von „6 Münchner Metzen, so fand ich es das erstemal in „einer Abhandlung, welche der sel. Hr. Hofkammer„rath von Waizenbeck, als er noch ein Magazins-Com„missarius war, herausgab. Und daß es so sey, habe „ich im Jahre 1790 in Neuburg, wohin ich zur Re„duktion der verschiedenen Mäßereyen des Herzogthums „Neuburg in die Münchner Mäßerey berufen worden, „in Gegenwart fast aller Neuburgischen H. H. Hof„kammerräthe durch eine unter meiner Direction ver„fertigte Wassereichmaschine handgreiflich gezeigt.“

IV. Der Sächsische Legations-Secretär Hr. Beigel giebt den Inhalt des baierischen Schäffels zwischen 208 und 208½ Münchner Maß an. In dem sowohl in Zachs monatlicher Correspondenz I. B. Seite 610, als in dem Regierungs-Intelligenzblatte eingerückten Schreiben ist aber nicht angezeigt, ob diese Bestimmungen auf neue Versuche sich stützen, oder aber nur die Resultate der bisher gemachten Versuche enthalten.

V. Vom Hrn. geistl. Rath Knogler in meiner und der H. H. Kollegen Holzinger und Hupfauer Gegenwart wurde 1799 in Ingolstadt mit möglichster Sorgfalt ein baierischer Metzen Brunnenwasser gewogen, der genau 66 ℔. 29 Loth 3 Quintl im baierischen Gewichte hielt, ferner wogen 34 baierische Maß von eben diesem Brunnenwasser 65 ℔ 14 Loth 2 Q. folglich faßt der baierische Metzen 34,767, und das Schäffel zu 6 Metzen 208,602 baierische Maß.

VI. Hr. Prof. Schiegg untersuchte im Jahre 1806 in Gegenwart einer Kommißion von der königl. baierischen Landes-Direction das Mutterschäffel; er fand durch wiederholte Versuche, daß eine baierische Maß Brunnenwasser aus dem weissen Bräuhause zu München bey 7 Grad Réaumur genau 14560 Gran baierischen Gewichtes wog; von eben diesem Wasser wurde das Mutterschäffel gefüllt, und das darin enthaltene Wasser wog 393 ℔ 25 Loth 194 Gran = 3024434 Gran baierischen Gewichtes, und hielt also 207,722 baierische Maß; wegen dem unebnen Rande des Mutterschäffels war man unschlüßig, ob nicht etwas Wasser sollte nachgegossen werden; so viel ließ sich zuverläßig wahr-

wahrnehmen, daß es noch gar leicht ½ Maß fassen würde; man ließ es beruhen, die Commißion setzte aber fest, daß der Inhalt eines baierischen Schäffels = 208 Maß anzunehmen sey.

VII. In der Mayrischen Sammlung Chur-Pfalzbaierischer Verordnungen II. Bande Seite 813 kömt eine Verordnung vom 9ten März 1768 vor, wo die Größe des Münchner Schäffels und Metzens auf folgende Art bestimmt ist:

„Fünftens, sind die Kalch- und so auch Gyps„mäßereyen gar nicht einstimmig, sondern verschieden„lich eingeführt, deren Ungleichheit dann auch viele „Beschwernisse verursachet."

„Derowegen fürohin das ordinari Getraidmaaß, „oder Münchner Schäffel zu 6 Metzen pr. 1 Schuh „7 Zoll hoch, dann 2 Schuh 10 Zoll (folglich ist hier „von Duodecimalzollen die Rede) in der untern Weite, „oder Diameter, und 2 Schuh 5 Zoll in der obern „Weite pro Norma genommen: so fort auch der Ge„treidmetzen zu 1 Schuh 5 und einen halben Zoll in „der obern und untern Weite oder Diameter, dann „10 und dreyviertel Zoll in der Höhe zum Ausmessen „gebraucht u. s. w."

Nach diesen Bestimmungen hält das Schäffel als abgekürzter Kegel 14833 baierische Duodecimal-Cubikzolle; der Metzen als Cylinder aber 2585,68 baier. Duod. Cubik-Zolle, folglich nach letzterer Bestimmung das Schäffel 15514,08 baier. Duod. Cubikzolle.

Wenn die Angaben in der Mairischen Sammlung nicht etwa durch Druckfehler entstellt sind, so ist der

Un-

Unterſchied zwiſchen dieſen beyden Größen ſowohl unter ſich als mit den obigen Verſuchen auffallend.

Man kann alſo als hinlänglich genau die Größe des baieriſchen Schäffels 208 baieriſche Maß oder 8944 baieriſche Decimal-Cubikzolle = 15455,232 baieriſche Duodecimal-Cubikzolle = 11209,598 franzöſiſche Duodecimal-Cubikzolle ſetzen.

Nach dieſem Maaße werden alle Getraidarten gemeſſen; beym Haber hält das Schäffel um den 6ten Theil, das iſt, um einen Metzen mehr, man mißt nemlich das gewöhnliche Schäffel, und giebt noch einen gewöhnlichen Metzen dazu, ſo daß alſo ein Haber Schäffel = 7/6 Korn oder Weitzen Schäffel beträgt, und dieſes iſt auch von allen Unterabtheilungen zu verſtehen, nemlich der Haber Metzen iſt wieder = 7/6 Korn Metzen u. ſ. f. (Man ſehe die churfürſtl. Verordnung d. d. Amberg den 20. Nov. 1761 im II. Band der Mairiſchen Generalienſammlung von 1784 Seite 1326—1331.)

D. Ein-

D. Eintheilung des baierischen Korn- Waitzen- und Gersten-Maaßes.

Schäffel	Metzen	Viertl $\frac{1}{2}$ Metzen	$\frac{1}{2}$ Viertl $\frac{1}{4}$ Metzen	Viertling $\frac{1}{8}$ Metzen	$\frac{1}{2}$ Viertling $\frac{1}{16}$ Metzen	Dreyßger $\frac{1}{32}$ Metzen	$\frac{1}{2}$ Dreyßger $\frac{1}{64}$ Metzen
1 Schäffel	6	12	24	48	96	192	384
	1 Metzen	2	4	8	16	32	64
		1 Viertl oder $\frac{1}{2}$ Metzen.	2	4	8	16	32
			$\frac{1}{2}$ Viertl oder $\frac{1}{4}$ Metzen.	2	4	8	16
				1 Viertling od. $\frac{1}{8}$ Meß.	2	4	8
					$\frac{1}{2}$ Viertling od. $\frac{1}{16}$ Metz	2	4
						1 Dreyßger od. $\frac{1}{32}$ Metz	2
							$\frac{1}{2}$ Dreyßger od. $\frac{1}{32}$ Metz

D. Eins

E. Eintheilung des Habermaaßes, und deſſen Verhältniß zum Kornmaaße.

Maaß an Waitzen und Korn.

Schäffel	Metzen.	Viertel.	½ Viertl.	Viertling	½ Viertling	Dreyßger	½ Dreyßger
1 Schäffel Haber	7	14	28	56	112	224	448
	1 Metzen Haber	2	4	8	16	32	64
		1 Viertl Haber	2	4	8	16	32
			1 Viertl Haber	2	4	8	16
				1 Viertling Haber	2	4	8
					½ Viertling Haber	2	4
						1 Dreyßger Haber	2
							½ Dreyßger Haber

Anmerkung. Außer den öffentlichen Schrannen sind in Baiern sowohl, als in der Pfalz verschiedene Getraidmaaße üblich, deren Größenbestimmungen mir aber nicht mit Zuverläßigkeit bekannt sind; die Reduktion davon auf das Münchner-Schäffel sind im Münchner genealogisch-chronologischen Handkalender von 1797 Seite 17, und vom Jahre 1798 Seite 109 eingerückt.

F. Größe verschiedener Getraidmaaße in französischen Duodecimal-Cubikzollen.

Maaße verschiedener Oerter.	Französische Duodec Cubik-Zolle.	Logarithmus.	
Ansbach: Kornmetzen zu 16 Maß	1065,12	3,0273986	e
Korn-Simmer zu 16 Metz.	17041,92	4,2314975	e
Habermetzen zu 18 Maß.	983,268	2,9926719	e
Haber-Simmer zu 32 Metz.	31464,576	4,4978219	e
Augsburg Vierling	323,4205	2,5097737	c
Metzen zu 4 Vierling	1293,682	3,1118276	c
Schaf zu 8 Metzen für alle Getraidsorten	10349,456	4,0149176	c
Baiern für alle Getraidsorten außer dem Haber: Metzen	1868,266	3,2714388	
Schäffel	11209,598	4,0495901	
Habermaaß: Metzen	2179,644	3,3383856	
Schäffel	13077,864	4,1165369	
Berlin Schäffel zu 16 Metz. für alle Getraidsorten	2758,952	3,4407442	f
Eichstädt für alle Sorten, Metzen	1875	3,2730013	g
Bey Weitzen und Korn ein Muth = 2 Schäffel = 32 Metzen	60000	4,7781513	g
Dresden, Scheffel	7621,009	3,568843[illegible]	

3072 preuß. Cub. Zoll. 9 Schef. = 16 Cub. Fuß

1 [illegible] = 1,42 ... bair. Metz.
Braunschweig. Himten = 1/10 Scheffel = 1/40 Wispel = 1560, 2 preuß. " [illegible] = 0,83 bair. Metzen.

Maaße verschiedener Oerter.	Französische Duodec. Cubikzolle.	Logarithmus.	
Eichstädt: bey Gersten und Dünkel ein Muth = 38 Metzen . . .	71250	4,8527849	g
Habermuth = 46 Metz.	86250	4,9357591	g
Frankreich altes Muid = 12 Setiers = 144 Boisseaux	92160	4,9645425	f
neues allgemeines franz. Körpermaaß ist das Litre = Mètre cub.	50,412316	1,7025374	i
Décalitre = 10 litres	504,12416	2,7025374	i
Décilitre = 0,1 litres	5,0412416	0,7025374	i
Mannheim Simmer zu 3 Immer	769	2,8859263	
Malter zu 8 Simmer	6152	3,7890163	
Für alle Getreidsorten			
Nürnberg Kornsimra = 16 Metzen	16336,051	4,2131470	
Habersimra = 32 Metz.	30388,48	4,4827089	
Wien und in den östreichischen Ländern . .			
Metzen zu 8 Achtel .	3100,54	3,4914373	
Muth zu 30 Metzen .	93016,2	4,9685586	
Für alle Getraidarten.			
Würzburg Stadt = Korn-Metzen	1094,487	3,0392107	q
Korn-Malter = 8 Metzen			
Habermetzen.	1690,18	3,2279329	q
Haber-Malter = 12 Metz.			
Würtenberg in den alten Landen für alle Getraidsorten Simri = 4 Metz. = ⅛ Schäffel . . .	1124,45	3,0509402	q

I. An-

1 bayr. ~~Schaffel~~ ~~[illegible]~~ = 1,06 .. bair.
Metzen ~~Schaffel~~ Hafermaas
1 Nürnb. Simra = 1,450 .. bair. Schaffel.
1 bair. Metz = 1,4066631 Nürnb. M.
49008153

I. Anmerkung. Die in der letzten Spalte vorkommenden Buchstaben geben wieder die Quellen an, welche beym Längenmaaße Tab. C. angezeigt sind.

II. Anmerkung zu q. Franz Huberti Vergleichung die Hochfürstlich-Würzburgischen und mehrere andere fremdherrischen Fruchtmaaße gegen das Würzburgische Stadtmaaß; im Jahre 1777.

G.

Eintheilung des Papiermaaßes.

Ballen	Riß	Buch	Bogen Schreibpap:	Bogen Druckpapier
1 Ballen.	10	200	4800	5000
	1 Riß	20	480	500
		1 Buch	24	25
			Bogen Schreibpap.	Bogen Druckpapier

1 Louis. Metzen = 3 Decalitres (Baiss)
+ 7,0596 Litres (Pintes)

1 Louis. Scheffel = 2 Hectolitres (Setiers) II. Ab-
+ 4 Litres + 2,3576 Litres

II. Abtheilung.

Vom Gewichte.

Das baierischs Pfund-Handelsgewicht fand Hr. Legations-Sekretär Beigel in holländischen Asen Troygewicht 11682, und die Cölnermark Münzgewicht 4870 Asen holl. Troygewichs, Hr. Eytelwein setzet hingegen die Cölnermark 4864 holl. Asen gleich. Das Apothekergewicht, welches für ganz Deutschland einerley seyn soll, setzet Vega 7443,9, Eytelwein hingegen 7438 holl. Asen Troygewicht. — In ganz Baiern und obern Pfalz ist einerley Gewicht eingeführt.

Anmerkung. Im Jahre 1806 untersuchte Hr. Prof. Schiegg die baierischen Muttergewichte, er fand, daß die kleinern Gewichte durch öftern Gebrauch von ihrer gesetzlichen Schwere verlohren haben, und nahm daher den baierischen Zentner als das Muttergewicht an. Nun fand er, daß der Einpfündner zu leicht sey um . . . . . 8,52 Gran.

der	Zweypfündner	15,79 Gran.
der	Dreypfündner	12,56 Gran.
der	Vierpfündner	8,71 Gran.
der	Fünfpfündner	6,10 Gran.
der	Zehnpfündner	2,20 Gran.
der	Fünfundzwanzigpfündner.	16,29 Gran.
der	Fünfzigpfündner	152,75 Gran.

folglich 100 Pfund in Theilen zu leicht um 222,88 Gran.

Diese Gewichte wurden aber nur unter sich, nicht aber mit einem andern ausländischen verglichen, so, daß ich also daraus nicht urtheilen kann, ob das vom

Hrn. Beigel angegebene Verhältniß richtig oder nicht ſey; aber es iſt ſchwer, zu begreifen, wie bey der angeführten Unrichtigkeit der Muttermaaße ein richtiges Verhältniß beſtimmt werden konnte.

A.

Eintheilung des baieriſchen Handelsgewichtes.

Centn.	Pfund	Unze	Loth	Quintl.	Pfenning gewicht	Gran.
1 Cent.	100	1600	3200	12800	51200	768000
1 Pfund	16	32	128	512	7680	
1 Unze	2	8	32	480		
1 Loth	4	16	240			
1 Quintl	4	60				
1 Pfenning gewicht	15					
Gran						

B.

Eintheilung des baieriſchen und überhaupt des deutſchen Apothekergewichts.

Pfund	Unze	Loth.	1 Drachma oder Quintl.	Scrupl	Gran
1 Pfund	12	24	96	288	5760
1 Unze	2	8	24	480	
1 Loth	4	12	240		
1 Drachma od. Quintl.	3	60			
1 Scrupl	20				
Gran					

C Ein-

C.

Eintheilung des baierischen Münzgewichtes, oder der Cöllner Mark.

Mark	Unzen	Loth	Karat	Quintl	Pfenning	Gran	Eschen oder Aß	Richtpfenning
1 Mark	8	16	24	64	256	288	4352	65536
	1 Unze	2	3	8	32	36	544	8192
		1 Loth.	$1\frac{1}{2}$	4	16	18	272	4096
			1 Karat	$2\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$	12	$181\frac{1}{3}$	$2730\frac{2}{3}$
				1 Quintl.	4	$4\frac{1}{2}$	68	1024
					1 Pfenning	$1\frac{1}{8}$	17	256
						1 Gran	$15\frac{1}{9}$	$227\frac{5}{9}$
								$15\frac{1}{17}$
								Richtpfenning.

D.

Eintheilung des holländiſchen Troygewichtes.

Mark	Unzen	Engel	Fierling	Toiskeu.	Deurskeu.	Aß
1 Mark	8	160	640	1280	2560	5120
1 Unze	20	80	160	320	640	
1 Engel	4	8	16	32		
1 Fierling	2	4	8			
1 Troiske	2	4				
1 Deurske	2					
Aß						

E.

Eintheilung des franzöſiſchen Troygewichtes.

Poids de Marc.

Marc	Once	Gros	Denier	Grain	Primes ou Carrobes.
1 Marc	8	64	192	4608	110592
1 Once	8	24	576	13824	
1 Gros	3	72	1728		
1 Denier	24	576			
1 Grain	24				
Primes					

I. Anmerkung. Das ehemalige franz. bürgerliche Handelsgewicht enthielt die nemlichen Eintheilungen, ſo, daß ein Pfund oder 1 Livre aus 2 Marcs, 16 Onces, 128 Gros, 384 Deniers, 9216 Grains, 221184 Primes beſtand.

II.

II. Anmerkung. Das Troygewicht bekam den Namen von Troyes in Champagne, wo ehedem sehr ansehnliche Jahrmärkte gehalten wurden, die Mark war anfänglich in Frankreich und Holland gleich; das holl. Troygewicht wird seit langer Zeit als Maaßstab gebraucht, nach welchen die an andern Orten eingeführten Gewichte miteinander verglichen werden.

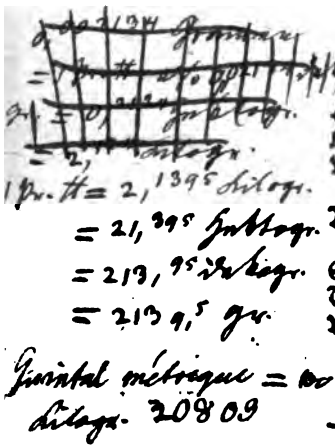
F.

Bestimmung verschiedener Gewichte nach holländischen Asen Troygewichts.

Namen der Länder und Orter.	Holl. Asen Troygew.	Logarithmus.	
Amsterdam ℔ Handelsgew.	10280	4,0119931	a
℔ Troygew. zu 16 Unzen.	10240	4,010300	a
℔ Apothekergew. zu 12 Unz.	7680	3,8853612	a
Münzgew. Mark zu 8 Unz.	5120	3,7092700	a
Augsburg ℔ Frohn- oder Schwergewicht . . .	10220	4,0091509	a
. . . . .	10214	4,0091959	r
℔ Kramer- oder Leichtgew.	9836	3,9628185	a
. . . . .	9830,5	3,9925756	r
Mark Münzgew. zu 8 Unz	4912	3,6912584	a
. . . . .	4909,12	3,6910037	r
Baiern ℔ Handelsgewicht	11682	4,0675172	= 1,200 ju. ℔. = 1,10 münch.
℔ Nürnberg oder deutsches Apothekergewicht . .	7443,9	3,8718005	a
Mark Münzgew. oder Ebl-ner Mark	4870	3,6875290	
Bayreuth ℔ Handelsgew.	10608	4,0256335	e
Berlin u. in den preußischen Staaten ℔ Handelsgew.	9747	3,9888710	f
nachst ℔	9728	3,9880236	= 0,97 avoir d. p.

Namen

Namen der Länder und Oerter.	Holl. Asen Troygew.	Logarithmus.	
Berlin ℔ Apothekergewicht	7438	3,8714562	f
Mark Münzgewicht . .	4864	3,6869936	f
Engelland ℔ Königtgewicht	14162	4,1511246	a
℔ Avoir du poids. . .	9441	3,9750180	a
℔ Troygew. zu 12 Unzen	7766	3,8901974	a
Eichstädt ℔ Handelsgew.	10610	4,0257154	g
Frankfurt am Mayn			
℔ Centnergewicht . . .	10595	4,0251010	a
℔ Handelsgewicht . . .	9720	3,9876663	a
Frankreich altes ℔ Poids de			
Marc	10188	4,008088	a
. . . . .	10183	4,0078757	f
altes Münzgewicht Mark	5094	3,7070589	a
neues Gewicht Gramme	20,8128	1,3183305	i
Décigramme = 0,1 Gram	2,08128	0,3183305	i
Décagramme = 10 Gram.	208,128	2,3183305	i
Hamburg ℔ Handelsgew.	10080	4,0034605	a
Leipzig ℔ Handelsgewicht	9716	3,9874875	a
Nürnberg ℔ Handelsgew.	10610	4,0257154	a
Mark Münzgewicht . .	4962,6	3,6957093	a
Regensburg ℔ Handelsgew	11804	4,0720292	m
Mark Münzgewicht . .	5118	3,7091003	m
Salzburg ℔ Handelsgew.	11655,43	4,0665284	n
Tyrol ℔ Handelsgewicht . .	11716	4,0687794	a
Wien ℔ ℥ Handelsgewicht	11655,43	4,0665284	a
℔ Apothekergew. zu 12 Unz.	8741,57	3,9415894	a
Mark Münzgew. = ⅔ Cölner Mark	5841	3,7664872	a



I. Anmerkung. Die in der letzten Spalte enthaltenen Buchstaben geben die in der Tabelle C. im Längenmaaße angeführten Quellen an.

II.

II. Anmerkung zu 1. Brander in Augsburg untersuchte die Augsburgischen Gewichte, und gab ihre Bestimmungen in einer Tabelle 1753 heraus, aus welcher ich die Angaben berechnete.

G.

Uebersicht der neuen franz. Maaße u. Gewichte.

1. Den neuesten Vermessungen gemäß hält ein Quadrant eines Mittagkreises 3078444 Pariser Fuß, folglich der 10öte Theil, oder Centesimalgrad 307844,4 Pariser Fuß.

2. Als allgemeines Längenmaaß ist der 0,00001 Centesimalgrad angenommen, und heißt Mètre; das Mètre hält also 3,078444 Pariser Fuß; um größere Längen zu bestimmen, dienen

   a. der Décamètre = 10 mètres,
   b. der Hectomètre = 100 mètres,
   c. der Kiliomètre = 1000 mètres;

   zu kleinen Längebestimmungen dienen als Maaße

   a. der Dècimètre = 0,1 mètre,
   b. der Centimètre = 0,01 mètre u. s. f.

3. Hundert Quadrat Mètres geben das allgemeine Flächenmaaß, welches Are heißt, aus welchen wieder für sich einleuchtet, was Décare. Hectare, und eben so Déciare, Centiare in Rücksicht von Are sagen wollen.

4. Der Cubus vom Décimètre, oder 0,001 cubische Mètres bestimmt das Frucht- oder Körpermaaß Litre.

5. Der

5. Der Cubus eines Mètre = 29,173852 Pariser Cubikfuß ist das neue französische Holzmaaß, und heißt Stère.

6. Nach den neuesten Versuchen wog ein Cubik mètre destillirten Wassers im luftleeren Raume bey seiner größten Dichtigkeit (l'eau étant amenée au *maximum* de sa densité dans le vide) 2042 Livres, 14 Onc. 0 Gros 14 Grain. Nach Hrn. Zachs geogr. Ephemeriden ist der größte Grad der Dichtigkeit vom Wasser beym 3,2° Grade des Quecksilbertherm. und reaumürischer Scale.

7. Dieses Gewicht eines Cubik-Mètre destillirten Wassers heißt Bar, und das Gewicht eines Cubik céntimètre heißt Gramme, welches also 18.82715 Grans hält, und als Maaß aller Gewichte angenommen wird.

Anmerkung. Diese Angaben sind aus Brisson Instruction sur le Mesures et Poids nouveanx. An. VIII. gezogen, und bey der Reduction der Gewichte auf holländische Asen nahm ich nach Hrn. Vega an, das das ehemalige ℔ Poids de Marc 10188 holländische Asen halte.

1 Quin. ℔ = 5 Hectogramms (onces) + 6 Decagramms (gros)

1 S. Ctr = 5 Myriagramms + 6 Kilogr. (livres).

III. Ab-

III. Abtheilung.

Von Münzen.

A.

Erklärungen von Münzen überhaupt.

1. Silber mit Kupfer, und Gold mit Silber, oder beyden zugleich legiren, oder beschicken, heißt solche Metalle zusammenschmelzen.

2. Feines Gold oder Silber wird jenes genannt, welches keinen Zusatz von einem andern Metalle enthält; da nun die Mark Gold in 24 Karath, und die Mark Silber in 16 Loth getheilet wird, so heißt

a. 23 oder 18 karathiges Gold jedes Stück, von welchem 23 oder 18 Theile fein Gold, und die übrigen 1 oder 6 Theile fremdartiges Metall enthalten, und man drückt den feinen Gehalt durch $\frac{23}{24}$ oder $\frac{18}{24}$ aus.

b. 12 oder 14 löthiges Silber heißt jedes Silber, von welchem 12, oder 14 Theile rein Silber, und die übrigen 4 oder 2 Theile aus fremdartigem Metalle bestehen; man bezeichnet dieses mit $\frac{12}{16}$ oder $\frac{14}{16}$ u. s. f.

3. Man unterscheidet

a. reelle oder gangbare Münzen, das ist, wirklich geprägte Geldstücke, z. B. Duraten, Conventionsthaler u. s. w.

b. fin-

b. fingirte oder Rechnungsmünzen, wodurch als Maaßstab der Werth der Dinge, und selbst der geprägten Münzen bestimmet wird, z. B. in Deutschland der Gulden, in England das Pfund Sterling u. s. w.

4. Um den Werth der reellen Münzen nach fingirten zu bestimmen, sieht man

a. auf die Beschaffenheit, und

b. das Gewicht des in einer Münze enthaltenen Metalles an.

5. Das Gewicht des in einer Münze enthaltenen Metalls zu bestimmen, braucht man in ganz Deutschland das Cölluer Markgewicht; man nennet daher

a. eine Mark vom feinem Golde oder Silber eine feine Mark, oder eine Markfein,

b. eine Mark des beschickten edlern Metalles eine rauche Mark, oder eine Markrauch.

6. Ferner heißt

a. das Gewicht einer Münzsorte ihr Schrot,

b. der Gehalt der Münze am edlern Metalle das Korn,

c. das Gesetz, wodurch Schrot, Korn, und der Kaufwerth einer Münze bestimmt wird, der Münzfuß.

7. Die im Deutschlande merkwürdigsten Münzfuße sind:

A. im

A. im Golde,

a. Der Rheinische Goldguldenfuß 72 Stück auf die rauhe Mark von 18 Karath 6 Grän Gold, und 3 Karath Silber; nach diesem Fuße sind die baierischen Karolinen und Max'ors gepräget.

b. Der Ducatenfuß, 67 Stück auf die feine Mark von 23 Karath 8 Grän Gold, und 2 Grän Silber.

B. in Silber,

a. Der alte Reichsfuß von 1566 auf dem Reichstage zu Augsburg, 8 Reichsthaler auf die rauhe, und 9 auf die feine Mark.

b. Der Leipziger, oder 18 Guldenfuß, 1690 zu Leipzig, die feine Mark Silber zu 12 Reichsthaler oder 18 Fl. Dieser Fuß wurde 1738 zum allgemeinen Reichsfuße angenommen, ist aber dermal nur von Braunschweig-Hannover noch beybehalten.

c. Der Graumannische, oder 21 Guldenfuß, 1750 von Preußen angenommen, und 1764 erneuert. Die feine Mark Silber auf 14 Reichsthaler oder 21 Fl.

d. Der Conventions- oder 20 Guldenfuß, die feine Mark zu $13\frac{1}{3}$ Thaler, oder 20 Gulden, nach diesem Fuße werden dermal in östreichischen, baierischen, sächsischen Staaten, so wie im schwäbischen, fränkischen, ober- und niederrheinischen Kreisen die Silbermünzen geprägt, aber nur in östreichischen und sächsischen Landen cursiren sie

nach

nach eben dieſem Fuße; in den übrigen genannten Ländern curſiren ſolche nach

e. dem 24 Guldenfuß, nemlich die feine Mark Silber zu 16 Reichsthaler, 24 Gulden, oder 10 Conventionsthaler.

B. Baieriſche Geldrechnung in gewöhnlicher oder weißer Münze.

Gulden	Batzen	Groſchen	Kreutzer.	Pfenning.	Häller
1 Guld.	15	20	60	240	480
1 Batzen		1⅓	4	16	32
1 Groſchen			3	12	24
1 Kreutzer				4	8
1 Pfenning					2
Häller					

C. Baieriſche Geldrechnung in ſchwarzer Münze.

1 ℔ Pfenning	Schilling	Pfenning	Häller	Betragen an weißer Münze fl.	kr.	pf	hl.
1 ℔ Pfenn.	8	240	480	1	8	2	7
1 Schilling		30	60	—	8	2	4/7
1 Pfenning			2	—	—	1	2/7
Häller				—	—	—	1⅓

D. Ver-

D.

Verhältniß verſchiedener Rechnungsmünzen.

Rechnungs-Münzen verſchiedener Länder.	Innerer Gehalt in holländ. Aſen Troygew.		Werth in 24 Guldenfuß.			
	in Gold	in Silb.	fl.	kr.	pf	hl.
Baiern und im Reiche nach dem 24 Guldenfuß. Gulden . .	14,8	202,66	1	—	—	—
Reichsthaler .	22,2	304,00	1	30	—	—
Oeſtreich nach dem Conventionsfuß. . Kaiſergulden .	17,29	243,2	1	12	—	—
Sachſen Reichsthal. nach d. Convent. Fuß zu 24 Groſchen . .	25,50	364,8	1	48	—	—
PreußenThaler nach 21 Guldenfuß . .	24,00	347,43	1	42	3	1
Gulden = ⅓ Thaler	8,00	115,81	—	34	1	—
Engelland Pf. Sterl. Schilling oder 240 Peuce	149,0	2286,5	11	17	—	—
Frankreich 1 *Livre* zu 20 *Sous tournois* oder 240 *Deniers* . . .	5,79	91,3	—	27	2	—
Neue Münze *Franc*	——	93,6576	—	27	3	—
Portugall *Millerèes* — 1000 *Réis* . .	42,75	563,52	2	46	3	½
Rußland Rubel zu 100 Kopeken . .	27,95	374,15	1	50	3	—
Spanien *Real* od. *Réal de Vellon* = 34 *Maravedis*	1,6	25	—	7	1	1 15/16
Piastre (Peso duro), = 20 *Réal* . .	32	500	2	28	—	—
Piaple (Dublon), = 80 *Réal* . .	128	2000	9	52	—	—

Rechnungs-Münzen verschiedener Länder.	Innerer Gehalt in holländ. Mark Troygew.		Werth in 24 Gulden-fuß.			
	in Gold.	in Silb.	fl.	kr.	pf	hl.
Real, Piastre, und Pistole sind zugleich reelle Münzen						
Türkey *Piastre* = 40 *Paras* = 1						
0 gute *Aspen* = 120 *Curant*						
Asper		185,3	—	54	3	1
Beutel (Keser) 500 Piastr. . . .						
Beutel Gold (Kitze) = 30000 Piastr.						

Anmerkung. Die Angaben sind größtentheils nach Grüson's Tabellen in seinem Grundrisse, und seiner vollständigen Anleitung zur Mathematik bestimmt, damit verglich ich Nelkenbrechers Tabellen; die Bestimmung der Francs ist nach Hrn. Beigels Angabe.

E. Verwandlung der sächsischen Geldrechnung in die baierische, und umgekehrt.

Sächsisch Geld.	beträgt nach baier. Gelde			
	fl.	kr.	pf	hl.
1 Pfenning	—	—	1	1
2 Pfenning	—	—	3	—
3 Pfenning	—	1	—	1
4 Pfenning	—	1	2	—
1 Groschē	—	4	2	—
2 Groschē	—	9	—	—
12 Gr. = ⅓ Th.	—	54	—	—
24 Gr. = Thal.	1	48	—	—

Baierisches Geld.	beträgt nach sächs. Gelde		
	Thl.	Gr.	pf
1 kr. . . .	—	—	2⅔
2 kr. . . .	—	1	5⅓
3 kr. . . .	—	—	8
12 kr. . . .	—	2	8
24 kr. . . .	—	5	4
30 kr. = ½ fl.	—	6	8
60 kr. = 1 fl.	—	13	4
90 kr. = Rthl.	—	20	—
1 Spec. Thle	1	8	—

F. Ver-

F. Verwandlung der preußischen Geldrechnung in die baierische, und umgekehrt.

Preuß. Geld.	beträgt nach baier. Gelde			
	fl.	kr.	pf	hl
1 Pfenning	—	—	1	1
2 Pfenning	—	—	3	—
12 Pfen. = 1 Gr.	—	4	1	1/2
12 Gr. = 1 1/2 Thlr.	—	51	1	1
24 Gr. = 1 Thlr.	1	42	3	1

Baier. Geld.	beträgt im preuß. Geld.		
	Thl	Gr	Pfen
1 Pfenning	—	—	2/3
1 Kr.	—	—	2 119/137
12 Kr.	—	2	10 1/2
14 Kr.	—	5	9
60 Kr. = 1 fl.	—	18	1

G. Verhältniß des baierischen und östreichischen Geldes.

Da man in baierischen sowohl, als östreichischen Ländern nach Gulden, Groschen, Kreutzer, und zwar nach der nemlichen Unterabtheilung rechnet, nur mit dem Unterschiede, daß in Baiern der 24 Gulden- in Oestreich aber der 20 Guldenfuß gilt, so ist

baierisch Geld : östreichisch Geld = 20 : 24 = 5 : 6

mithin z. B., 6 baierische Gulden = 5 östreichische Gulden.

H. Wirkliche vorzügliche baierische Goldmünzen.

Namen der Münze.	Stück auf eine rauhe Mark.	Stück auf die feine Mark.	Schrott an holländ. Asen.	Korn an holl. Asen Trogw.	dermal Curent werth. fl.	kr.
Baierische						
Ducaten	67	67 57/71	72,69	71,68	5	20
Cardin	54	31 5/87	202,92	150,41	11	24
Max'd'or	36	46 33/37	135,28	102,30	7	29
Französische						
alte Schild.						
Louisd'or	28,6	31 27/85	170,28	153,73	11	—
neue seit 1786	30	33 3/13	162,5	146,70	10	30
Oestreichis.						
veraind'or	21 37/777	21 60/225 73	234,62	213,07	16	—

Anmerkung. Kaiserliche, Kremnitzer, Holländer, Salzburger, und alle vollgewichtige Reichsducaten sind an Werth den baierischen gleich; — die päbstlichen Ducaten aber gelten nur 5 fl. 8 kr. Ein Florentiner Ducate gilt 5 fl. 14 kr.

I. Baierische Silbermünzen nach dem Conventionsfuß.

Namen der Münze.	Stück auf k rauhe Mark.	Stück auf d. feine Mark	Schrott an holländ. Asen Trogew.	Korn an holländisch Asen.	Werth nach d. 24 fl. Fuß. fl.	kr.
Ganz. Conv. Thlr.	8 1/3	10	584,4	487	2	24
Halbe Conv. Thaler.	16 2/3	20	292,2	243,5	1	12
20 kr. Stück	35	60	139,14	81,166...	—	24
10 kr. Stück	60	120	81,166...	40,583	—	12

Außer diesen werden noch in Silber Sechskreutzer, Groschen- und Kreutzerstücke; in Kupfer Pfenning und Häller geprägt.

Ta-

Tabelle

der gemeinen, oder briggischen Logarithmen aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1000.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
0	inf. neg.	30	1,4771213	60	1,7781513	90	1,9542425
1	0,0000000	31	1,4913617	61	1,7853298	91	1,9590414
2	0,3010300	32	1,5051500	62	1,7923917	92	1,9637878
3	0,4771213	33	1,5185139	63	1,7993405	93	1,9684829
4	0,6020600	34	1,5314789	64	1,8061800	94	1,9731279
5	0,6989700	35	1,5440680	65	1,8129134	95	1,9777236
6	0,7781513	36	1,5563025	66	1,8195439	96	1,9822712
7	0,8450980	37	1,5682017	67	1,8260748	97	1,9867717
8	0,9030900	38	1,5797836	68	1,8325089	98	1,9912261
9	0,9542425	39	1,5910646	69	1,8388491	99	1,9956351
10	1,0000000	40	1,6020600	70	1,8450980	100	2,0000000
11	1,0413927	41	1,6127839	71	1,8512583	101	2,0043214
12	1,0791812	42	1,6232493	72	1,8573325	102	2,0086000
13	1,1139434	43	1,6334685	73	1,8633229	103	2,0128372
14	1,1461280	44	1,6434527	74	1,8692317	104	2,0170333
15	1,1760913	45	1,6532125	75	1,8750613	105	2,0211893
16	1,2041200	46	1,6627578	76	1,8808136	106	2,0253059
17	1,2304489	47	1,6720979	77	1,8864907	107	2,0293838
18	1,2552725	48	1,6812412	78	1,8920946	108	2,0334238
19	1,2787536	49	1,6901961	79	1,8976271	109	2,0374265
20	1,3010300	50	1,6989700	80	1,9030900	110	2,0413927
21	1,3222193	51	1,7075702	81	1,9084850	111	2,0453230
22	1,3424227	52	1,7160033	82	1,9138139	112	2,0492180
23	1,3617278	53	1,7242759	83	1,9190781	113	2,0530784
24	1,3802112	54	1,7323938	84	1,9242793	114	2,0569049
25	1,3979400	55	1,7403627	85	1,9294189	115	2,0606978
26	1,4149733	56	1,7481880	86	1,9344985	116	2,0644580
27	1,4313638	57	1,7558749	87	1,9395193	117	2,0681859
28	1,4471580	58	1,7634280	88	1,9444827	118	2,0718820
29	1,4623980	59	1,7708520	89	1,9493900	119	2,0755470
N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
120	2,0791812	155	2,1903317	190	2,2787536	225	2,3521825
121	2,0827854	156	2,1931246	191	2,2810334	226	2,3541084
122	2,0863598	157	2,1958997	192	2,2833012	227	2,3560259
123	2,0899051	158	2,1986571	193	2,2855573	228	2,3579348
124	2,0934217	159	2,2013971	194	2,2878017	229	2,3598355
125	2,0969100	160	2,2041200	195	2,2900346	230	2,3617278
126	2,1003705	161	2,2068259	196	2,2922561	231	2,3636120
127	2,1038037	162	2,2095150	197	2,2944662	232	2,3654880
128	2,1072100	163	2,2121876	198	2,2966652	233	2,3673559
129	2,1105897	164	2,2148438	199	2,2988531	234	2,3692159
130	2,1139434	165	2,2174839	200	2,3010300	235	2,3710679
131	2,1172713	166	2,2201081	201	2,3031961	236	2,3729120
132	2,1205739	167	2,2227165	202	2,3053514	237	2,3747483
133	2,1238516	168	2,2253093	203	2,3074960	238	2,3765770
134	2,1271048	169	2,2278867	204	2,3096302	239	2,3783979
135	2,1303338	170	2,2304489	205	2,3117539	240	2,3802112
136	2,1335389	171	2,2329961	206	2,3138672	241	2,3820170
137	2,1367206	172	2,2355284	207	2,3159703	242	2,3838154
138	2,1398791	173	2,2380461	208	2,3180633	243	2,3856063
139	2,1430148	174	2,2405492	209	2,3201463	244	2,3873898
140	2,1461280	175	2,2430380	210	2,3222193	245	2,3891661
141	2,1492191	176	2,2455127	211	2,3242825	246	2,3909351
142	2,1522883	177	2,2479733	212	2,3263359	247	2,3926970
143	2,1553360	178	2,2504200	213	2,3283796	248	2,3944517
144	2,1583625	179	2,2528530	214	2,3304138	249	2,3961993
145	2,1613680	180	2,2552725	215	2,3324385	250	2,3979400
146	2,1643529	181	2,2576786	216	2,3344538	251	2,3996737
147	2,1673173	182	2,2600714	217	2,3364597	252	2,4014005
148	2,1702617	183	2,2624511	218	2,3384565	253	2,4031205
149	2,1731863	184	2,2648178	219	2,3404441	254	2,4048337
150	2,1760913	185	2,2671717	220	2,3424227	255	2,4065402
151	2,1789769	186	2,2695129	221	2,3443923	256	2,4082400
152	2,1818436	187	2,2718416	222	2,3463530	257	2,4099331
153	2,1846914	188	2,2741578	223	2,3483049	258	2,4116197
154	2,1875207	189	2,2764618	224	2,3502480	259	2,4132998
N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
260	2,4149733	295	2,4698220	330	2,5185139	365	2,5622929
261	2,4166405	296	2,4712917	331	2,5198280	366	2,5634811
262	2,4183013	297	2,4727564	332	2,5211381	367	2,5646661
263	2,4199557	298	2,4742163	333	2,5224442	368	2,5658478
264	2,4216039	299	2,4756712	334	2,5237465	369	2,5670264
265	2,4232459	300	2,4771213	335	2,5250448	370	2,5682017
266	2,4248816	301	2,4785665	336	2,5263393	371	2,5693739
267	2,4265113	302	2,4800069	337	2,5276299	372	2,5705429
268	2,4281348	303	2,4814426	338	2,5289167	373	2,5718088
269	2,4297523	304	2,4828736	339	2,5301997	374	2,5728716
270	2,4313638	305	2,4842998	340	2,5314789	375	2,5740313
271	2,4329693	306	2,4857214	341	2,5328544	376	2,5751878
272	2,4345689	307	2,4871384	342	2,5340261	377	2,5763414
273	2,4361626	308	2,4885507	343	2,5352941	378	2,5774918
274	2,4377506	309	2,4899585	344	2,5365584	379	2,5786393
275	2,4393327	310	2,4913617	345	2,5378191	380	2,5797836
276	2,4409091	311	2,4927604	346	2,5390761	381	2,5809250
277	2,4424798	312	2,4941546	347	2,5403295	382	2,5820634
278	2,4440448	313	2,4955443	348	2,5415792	383	2,5831988
279	2,4456042	314	2,4969296	349	2,5428254	384	2,5843312
280	2,4471580	315	2,4983106	350	2,5440680	385	2,5854607
281	2,4487063	316	2,4996871	351	2,5453071	386	2,5865873
282	2,4502491	317	2,5010593	352	2,5465427	387	2,5877110
283	2,4517864	318	2,5024271	353	2,5477747	388	2,5888317
284	2,4533183	319	2,5037907	354	2,5490033	389	2,5899496
285	2,4548449	320	2,5051500	355	2,5502284	390	2,5910646
286	2,4563660	321	2,5065050	356	2,5514500	391	2,5921768
287	2,4578819	322	2,5078559	357	2,5526682	392	2,5932861
288	2,4593925	323	2,5092025	358	2,5538830	393	2,5943926
289	2,4608978	324	2,5105450	359	2,5550944	394	2,5954962
290	2,4623980	325	2,5118834	360	2,5563025	395	2,5965971
291	2,4638930	326	2,5132176	361	2,5575072	396	2,5976952
292	2,4653829	327	2,5145478	362	2,5587086	397	2,5987905
293	2,4668676	328	2,5158738	363	2,5599066	398	2,5998831
294	2,4683473	329	2,5171959	364	2,5611014	399	2,6009729

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
400	2,6020600	435	2,6384893	470	2,6720979	505	2,7032914
401	2,6031444	436	2,6394865	471	2,6730209	506	2,7041505
402	2,6042261	437	2,6404814	472	2,6739420	507	2,7050080
403	2,6053050	438	2,6414741	473	2,6748611	508	2,7058637
404	2,6063814	439	2,6424645	474	2,6757783	509	2,7067178
405	2,6074550	440	2,6434527	475	2,6766936	510	2,7075702
406	2,6085260	441	2,6444386	476	2,6776070	511	2,7084209
407	2,6095944	442	2,6454223	477	2,6785184	512	2,7092700
408	2,6106602	443	2,6464037	478	2,6794279	513	2,7101174
409	2,6117233	444	2,6473830	479	2,6703355	514	2,7109631
410	2,6127839	445	2,6483600	480	2,6812412	515	2,7118072
411	2,6138418	446	2,6493349	481	2,6821451	516	2,7126497
412	2,6148972	447	2,6503075	482	2,6830470	517	2,7134905
413	2,6159501	448	2,6512780	483	2,6839471	518	2,7143298
414	2,6170003	449	2,6522463	484	2,6848454	519	2,7151674
415	2,6180481	450	2,6532125	485	2,6857417	520	2,7160033
416	2,6190933	451	2,6541765	486	2,6866363	521	2,7168377
417	2,6201361	452	2,6551384	487	2,6875290	522	2,7176705
418	2,6211763	453	2,6560982	488	2,6884198	523	2,7185017
419	2,6222140	454	2,6570559	489	2,6893089	524	2,7193313
420	2,6232493	455	2,6580114	490	2,6901961	525	2,7201593
421	2,6242821	456	2,6589648	491	2,6910815	526	2,7209857
422	2,6253125	457	2,6599162	492	2,6919651	527	2,7218106
423	2,6263404	458	2,6608655	493	2,6928469	528	2,7226339
424	2,6273659	459	2,6618127	494	2,6937269	529	2,7234557
425	2,6283889	460	2,6627578	495	2,6946052	530	2,7242759
426	5,6294096	461	2,6637009	496	2,6954817	531	2,7250945
427	2,6304279	462	2,6646420	497	2,6963564	532	2,7259116
428	2,6314438	463	2,6655810	498	2,6972293	533	2,7267272
429	2,6324573	464	2,6665180	499	2,6981005	534	2,7275413
430	2,6334685	465	2,6674530	500	2,6989700	535	2,7283538
431	2,6344773	466	2,6683859	501	2,6998377	536	2,7291648
432	2,6354837	467	2,6693169	502	2,7007037	537	2,7299743
433	2,6364879	468	2,6702459	503	2,7015680	538	2,7307823
434	2,6374897	469	2,6711728	504	2,7024305	539	2,7315888
N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
540	2,7323938	575	2,7596678	610	2,7853298	645	2,8093597
541	2,7331973	576	2,7604225	611	2,7860412	646	2,8101325
542	2,7339993	577	2,7611758	612	2,7867514	647	2,8109043
543	2,7347998	578	2,7619278	613	2,7874605	648	2,8116750
544	2,7355989	579	2,7626786	614	2,7881684	649	2,8124447
545	2,7363965	580	2,7634280	615	2,7888751	650	2,8132134
546	2,7371926	581	2,7641761	616	2,7895807	651	2,8139810
547	2,7379873	582	2,7649230	617	2,7902852	652	2,8147476
548	2,7387806	583	2,7656686	618	2,7909885	653	2,8149132
549	2,7395725	584	2,7664128	619	2,7916906	654	2,8155777
550	2,7403627	585	2,7671559	620	2,7923917	655	2,8162413
551	2,7411516	586	2,7678976	621	2,7930916	656	2,8169038
552	2,7419391	587	2,7686381	622	2,7937904	657	2,8175654
553	2,7427251	588	2,7693773	623	2,7944880	658	2,8182259
554	2,7435098	589	2,7701153	624	2,7951846	659	2,8188854
555	2,7442930	590	2,7708520	625	2,7958800	660	2,8195439
556	2,7450748	591	2,7715875	626	2,7965743	661	2,8202013
557	2,7458552	592	2,7723217	627	2,7972675	662	2,8208580
558	2,7466342	593	2,7730547	628	2,7979596	663	2,8215135
559	2,7474118	594	2,7737861	629	2,7986506	664	2,8221681
560	2,7481880	595	2,7745170	630	2,7993405	665	2,8228216
561	2,7489629	596	2,7752463	631	2,8000294	666	2,8234742
562	2,7497363	597	2,7759743	632	2,8007171	667	2,8241258
563	2,7505084	598	2,7767012	633	2,8014037	668	2,8247765
564	2,7512791	599	2,7774268	634	2,8020893	669	2,8254261
565	2,7520484	600	2,7781513	635	2,8027737	670	2,8260748
566	2,7528164	601	2,7788745	636	2,8034571	671	2,8267225
567	2,7535831	602	2,7795965	637	2,8041394	672	2,8273693
568	2,7543483	603	2,7803173	638	2,8047207	673	2,8280151
569	2,7551123	604	2,7810369	639	2,8055009	674	2,8286599
570	2,7558749	605	2,7817553	640	2,8061600	675	2,8293038
571	2,7566361	606	2,7824726	641	2,8068530	676	2,8299467
572	2,7573960	607	2,7831887	642	2,8075350	677	2,8305887
573	2,7581546	608	2,7839036	643	2,8082116	678	2,8312297
574	2,7589119	609	2,7846173	644	2,8088859	679	2,8318698
N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
680	2,8325089	715	2,8543060	750	2,8750613	785	2,8948697
681	2,8331471	716	2,8549130	751	2,8756399	786	2,8954225
682	2,8337844	717	2,8555192	752	2,8762178	787	2,8959747
683	2,8344207	718	2,8561244	753	2,8767950	788	2,8965262
684	2,8350561	719	2,8567289	754	2,8773713	789	2,8970770
685	2,8356906	720	2,8573325	755	2,8779470	790	2,8976271
686	2,8363241	721	2,8579353	756	2,8785218	791	2,8981765
687	2,8369567	722	2,8585372	757	2,8790959	792	2,8987252
688	2,8375884	723	2,8591383	758	2,8796692	793	2,8992732
689	2,8382192	724	2,8597386	759	2,8802418	794	2,8998205
690	2,8388491	725	2,8603800	760	2,8808136	795	2,9003671
691	2,8394780	726	2,8609366	761	2,8813847	796	2,9009131
692	2,8401061	727	2,8615344	762	2,8819550	797	2,9014583
693	2,8407332	728	2,8621314	763	2,8825245	798	2,9020029
694	2,8413595	729	2,8627275	764	2,8830934	799	2,9025468
695	2,8419848	730	2,8633229	765	2,8836614	800	2,9030900
696	2,8426092	731	2,8639174	766	2,8842288	801	2,9036325
697	2,8432328	732	2,8645111	767	2,8847954	802	2,9041744
698	2,8438554	733	2,8651040	768	2,8853612	803	2,9047155
699	2,8444772	734	2,8656961	769	2,8859263	804	2,9052560
700	2,8450980	735	2,8662873	770	2,8864907	805	2,9057959
701	2,8457180	736	2,8668778	771	2,8870544	806	2,9063350
702	2,8463371	737	2,8674675	772	2,8876173	807	2,9068735
703	2,8469553	738	2,8680564	773	2,8881795	808	2,9074114
704	2,8475727	739	2,8686444	774	2,8887410	809	2,9079485
705	2,8481891	740	2,8692317	775	2,8893017	810	2,9084850
706	2,8488047	741	2,8698182	776	2,8898617	811	2,9090209
707	2,8494194	742	2,8704039	777	2,8904210	812	2,9095560
708	2,8500333	743	2,8709888	778	2,8909796	813	2,9100905
709	2,8506462	744	2,8715729	779	2,8915375	814	2,9106244
710	2,8512583	745	2,8721563	780	2,8920946	815	2,9111576
711	2,8518696	746	2,8727388	781	2,8926510	816	2,9116902
712	2,8524800	747	2,8733206	782	2,8932068	817	2,9122221
713	2,8530895	748	2,8739016	783	2,8937618	818	2,9127533
714	2,8536982	749	2,8744818	784	2,8943161	819	2,9132839

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
820	2,9138139	855	2,9319661	890	2,9493900	925	2,9661417
821	2,9143432	856	2,9324738	891	2,9498777	926	2,9666110
822	2,9148718	857	2,9329808	892	2,9503649	927	2,9670797
823	2,9153998	858	2,9334873	893	2,9508515	928	2,9675480
824	2,9159272	859	2,9339932	894	2,9513375	929	2,9680157
825	2,9164539	860	2,9344985	895	2,9518230	930	2,9684829
826	2,9169800	861	2,9350032	896	2,9523080	931	2,9689497
827	2,9175055	862	2,9355073	897	2,9527924	932	2,9694159
828	2,9180303	863	2,9360108	898	2,9532763	933	2,9698816
829	2,9185545	864	2,9365137	899	2,9537597	934	2,9703469
830	2,9190781	865	2,9370161	900	2,9542425	935	2,9708116
831	2,9196010	866	2,9375179	901	2,9547248	936	2,9712758
832	2,9201233	867	2,9380191	902	2,9552065	937	2,9717396
833	2,9206450	868	2,9385197	903	2,9556878	938	2,9722028
834	2,9211661	869	2,9390198	904	2,9561684	939	2,9726656
835	2,9216865	870	2,9395193	905	2,9566486	940	2,9731279
836	2,9222063	871	2,9400182	906	2,9571282	941	2,9735896
837	2,9227255	872	2,9405165	907	2,9576073	942	2,9740509
838	2,9232440	873	2,9410142	908	2,9580858	943	2,9745117
839	2,9237620	874	2,9415114	909	2,9585639	944	2,9749720
840	2,9242793	875	2,9420081	910	2,9590414	945	2,9754318
841	2,9247960	876	2,9425041	911	2,9595184	946	2,9758911
842	2,9253121	877	2,9429996	912	2,9599948	947	2,9763500
843	2,9258276	878	2,9434945	913	2,9604708	948	2,9768083
844	2,9263424	879	2,9439889	914	2,9609462	949	2,9772662
845	2,9268567	880	2,9444827	915	2,9614211	950	2,9777236
846	2,9273704	881	2,9449759	916	2,9618955	951	2,9781805
847	2,9278834	882	2,9454686	917	2,9623693	952	2,9786369
848	2,9283959	883	2,9459607	918	2,9628427	953	2,9790929
849	2,9289077	884	2,9464523	919	2,9633155	954	2,9795484
850	2,9294189	885	2,9469433	920	2,9637878	955	2,9800034
851	2,9299296	886	2,9474337	921	2,9642596	956	2,9804579
852	2,9304396	887	2,9479236	922	2,9647309	957	2,9809119
853	2,9309490	888	2,9484130	923	2,9652017	958	2,9813655
854	2,9314579	889	2,9489018	924	2,9656720	959	2,9818186
N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
960	2,9822712	970	2,9867717	980	2,9912261	990	2,9956352
961	2,9827234	971	2,9872192	981	2,9916690	991	2,9960737
962	2,9831751	972	2,9876663	982	2,9921115	992	2,9965117
963	2,9836263	973	2,9881128	983	2,9925535	993	2,9969492
964	2,9840770	974	2,9885590	984	2,9929951	994	2,9973864
965	2,9845273	975	2,9890046	985	2,9934362	995	2,9978231
966	2,9849771	976	2,9894498	986	2,9938769	996	2,9982593
967	2,9854265	977	2,9898946	987	2,9943172	997	2,9986952
968	2,9858754	978	2,9903389	988	2,9947569	998	2,9991305
969	2,9863238	979	2,9907827	989	2,9951963	999	2,9995655
N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

351. zur II. Anmerkung als Nachtrag:

Die Regiekösten beliefen sich 1804. auf 2351 fl. 29½ kr., mithin kömmt auf 100 fl. der Beytrag 7 kr. 1 pf., es wurden aber von 100 fl. einsweilen 7 kr. 2 pf. erhoben, hingegen der Ueberschuß im folgenden Jahre in Einnahme gesetzet.

Im sechsten Jahre, oder 1805. war der Werth aller assecurirten Gebäude 109'496,675 fl., und der Totalschaden 164,505 fl. 31 kr. 3 pf.; die Regiekosten 3188 fl. 30 kr., mithin kömmt auf 100 fl. als Concurrenz 9 kr. — pf. 1 hlr. es wurden aber 9 kr. 2 pf. erhoben, und der Ueberschuß im folgenden Jahre in Einnahme gebracht.

Im 7ten Jahre oder 1806. belief sich der angegebene Werth der assecurirten Gebäude auf 112'560,700 fl., der Totalschaden auf 79,702 fl. 44 kr. 1 pf., von 100 fl. wurden einsweilen als Concurrenz 4 kr. erhoben.

Verzeichniß der Druckfehler.

Seite	Zeile	Statt	Lies.
3	16	die	da
24	25	$a+b>c+d$	$a+c>b+d$
41	10	Producte	Producte u. Quotienten
53	13	des	der
—	21	den Zahlen	ganzen Zahlen
57	letzte	§. 46. b	§. 43. b.
62	17	Rroduct	Product
72	20	$\frac{na}{ne}$	$\frac{na}{nc}$
79	4	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
—	letzte	$\frac{c}{b}$	$\frac{c}{d}$
82	5	$\frac{3}{21}$	$\frac{8}{21}$
85	vorletzte	v. der linken z. rechten	v. der rechten z. link.
96	15	$\left(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}^{m}\right.$	$\left(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\right)^{m}$
112	vorletzte	$-5\sqrt[3]{b}\sqrt[n]{\ }$	$-5\sqrt[3]{b}$
114	nach 12 sollte in der Mitte §. 116. stehen		
133	13	$+1^2$	$+1^3$
138	3	Rechts	Links
151	14	b^{2n-}	b^{n-2}
152	19	$\frac{7.\ 6.\ 5}{1.\ 2.\ 6}$	$\frac{7.\ 6.\ 5}{1.\ 2.\ 3}$
154	4	$\frac{m.\ (m-2)}{1.\ 2}$	$\frac{m\ (m-1)}{1.\ 2}$
155	14	e^2+	e^2-
157	8	$\frac{m.^2\ (n+1)}{1.\ 2\ n}$	$\frac{m.^2\ (n-1)}{1.\ 2\ n}$
159	10	$(1+e)^{\frac{m}{n}}.(1+e)^{\frac{m}{n}}$	$(1+e)^{\frac{m}{n}}.(1+e)^{\frac{m}{n}}$

S. 134. Z. 7. R. Eudus L. Eubus

Seite	Zeile	Statt	Lies
160	vorletzte	$-\frac{2m^2}{3n^2}$	$-\frac{2m^2}{2n^2}$
162	7	e^2	e^3
—	19	a_m	a^m
165	14	$\frac{m-n}{3n}$	$\frac{m-n}{2n}$
211	2	§. 137.	§. 136.
—	3 u. 4.	$Ay^{n\cdot 2}$	$A^2y^{n\cdot 2}$
218	13	$\frac{1}{2}g+\surd$	$\frac{1}{2}g+\frac{1}{2}\surd$
—	14	$\frac{1}{2}g-\surd$	$\frac{1}{2}g-\frac{1}{2}\surd$
224	23	$=1$	$=a$
264	21	§. 62. II Zus.	§. 62. Zus.
267	24	intervendo	invertendo
273	18	§. 210. VI Zus.	§. 210. IV Zus.
288	23	§. 129.	§. 219.

S. 436. Z. 9. statt $\frac{abgx^6}{3}$ lies $\frac{abgx^6}{6}$

S. 441. Z. 17. statt $-\frac{3}{2}$ lies $-\frac{2}{3}$

S. 447. Z. 6 statt -1 lies $-\frac{1}{2}$, im Exponent

~~[illegible]~~

S. 457. Z. 4 u. 5 lies $\frac{b}{a}$ statt $\frac{a}{b}$

$\frac{-3))}{)}$ a^m

M a^{m-}

3) b^{n-}

Ver

ea;

ia

ie

ii

oa

oe

oi

oo

Seite	Zeile	Statt	Lies
160	vorletzte	$-\frac{2m^2}{3n^2}$	$-\frac{2m^2}{2n^2}$
162	7	e^2	e^3
—	19	a_m	a^m
165	14	$\frac{m-n}{3n}$	$\frac{m-n}{2n}$
211	2	§. 137.	§. 136.
—	3 u. 4.	$Ay^{n \cdot 2}$	$A^2y^{n \cdot 2}$
218	13	$\frac{1}{2}g+\sqrt{}$	$\frac{1}{2}g+\frac{1}{2}\sqrt{}$
—	14	$\frac{1}{2}g-\sqrt{}$	$\frac{1}{2}g-\frac{1}{2}\sqrt{}$
224	23	$=1$	$=a$
264	21	§. 62. II Zus.	§. 62. Zus.
267	24	intervendo	invertendo
273	18	§. 210. VI Zus.	§. 210. IV Zus.
288	23	§. 129.	§. 219.

S. 436. Z. 9. statt $\frac{abgx^6}{3}$ lies $\frac{abgx^6}{6}$

S. 441. Z. 17. statt $-\frac{3}{2}$ lies $-\frac{2}{3}$

S. 447. Z. 8 statt -1 lies $-\frac{1}{2}$, um Exponent

~~S. 451 Z. 2 [illegible]~~

S. 453. Z. 4 u. 5 lies $\frac{b}{a}$ statt $\frac{a}{b}$

36.

$\frac{-3))}{)}$ a^m

M a^{m-}

3) b^{n-}

Ver

ea;

ia

ie

ii

oa

oe

oi

oo

lle zu §. 312.

$xdy + 4dxdy + 2dyd^2$

$dxdy$ Nro. 2; mithin

$+ xdy + 3dxdy + 2d$

$+ dxdy$ (§. 305.),

$yd^2x + xd^2y + 2dxdy$

---

belle zu §. 3

$\frac{3m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}\frac{-1)(m-2)}{.2.3}x^{m-3}d^2x^3 + \ldots$

$= X'' - X'$ (§. 302.),

$\frac{m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}dx\frac{-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}d^2x^3 + \ldots$

$X' - dX$ (§. 302. c.)

$^3dx^3 + 2m(m-1)(m^{-3}d^2x^3 + \ldots\ldots$

---

belle zu §. 31

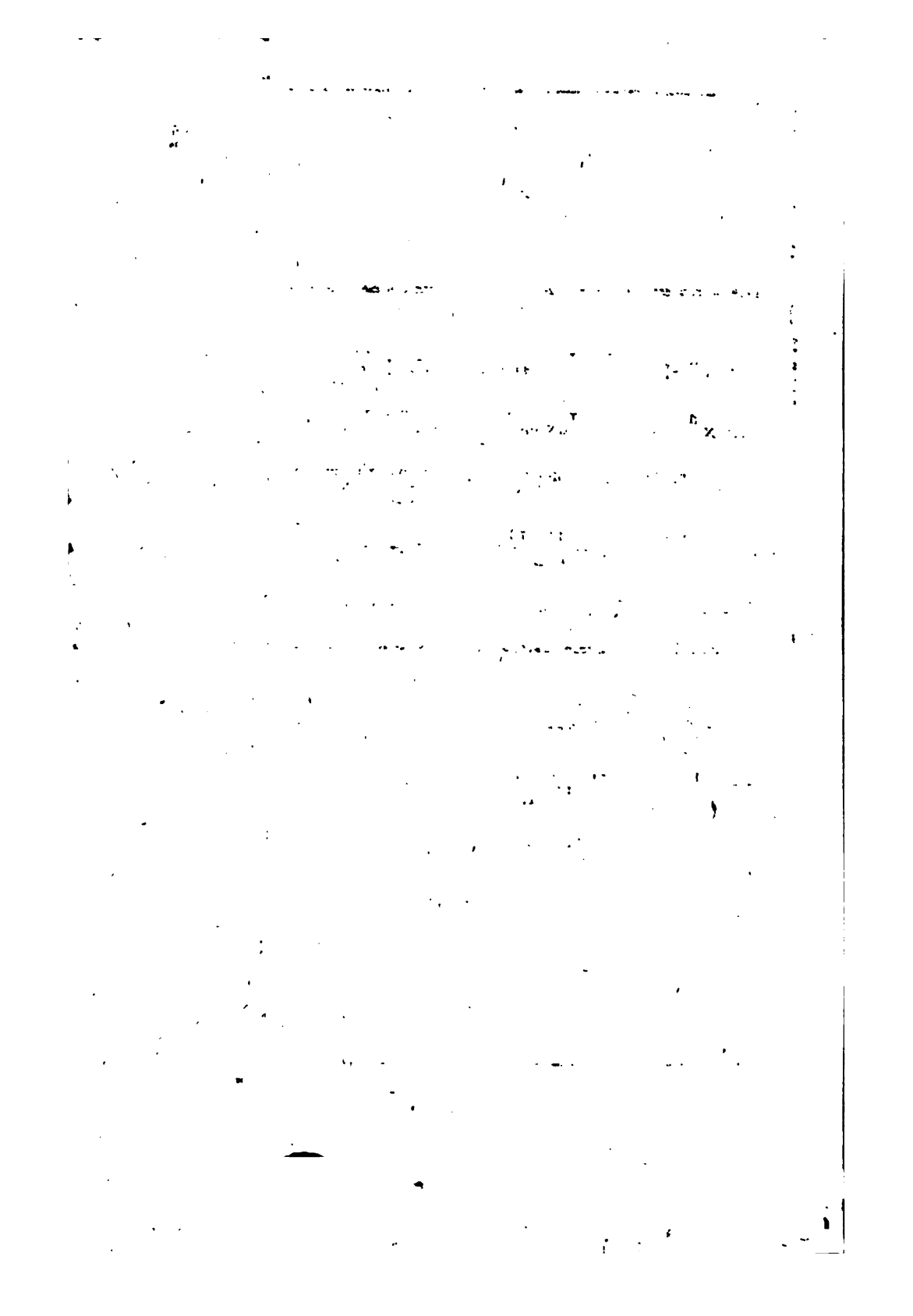
$\frac{n.(n-1)}{1.2}(a+x)^{n-2}u^2$

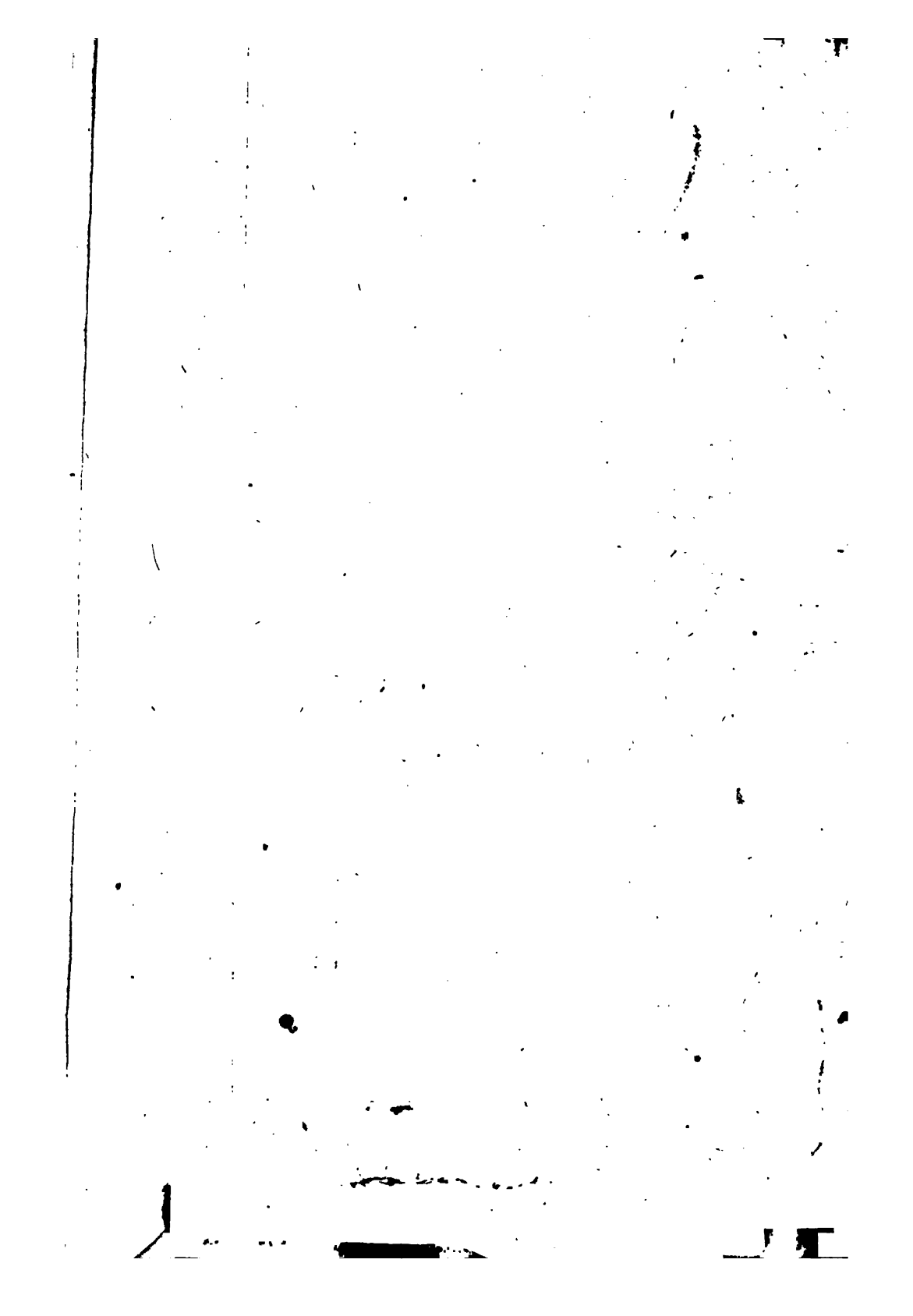
$+ \ldots = x^m(a+x)^n + {}^{m-3}(a+x)^n \Big\} + \ldots$

$+ \quad (a+x)^{n-1} \Big\} \frac{u^3}{1.2.3} + \ldots$

$^3 + \ldots \quad (a+x)^{n-2} \Big\}$

$(a+x)^{n-3} \Big\}$





Auflösung

einer

cubischen

und

biquadratischen Gleichung.

Als

Anhang zum I. Theil des mathematischen Lehrbuches

von

Mag. old.

Landshut

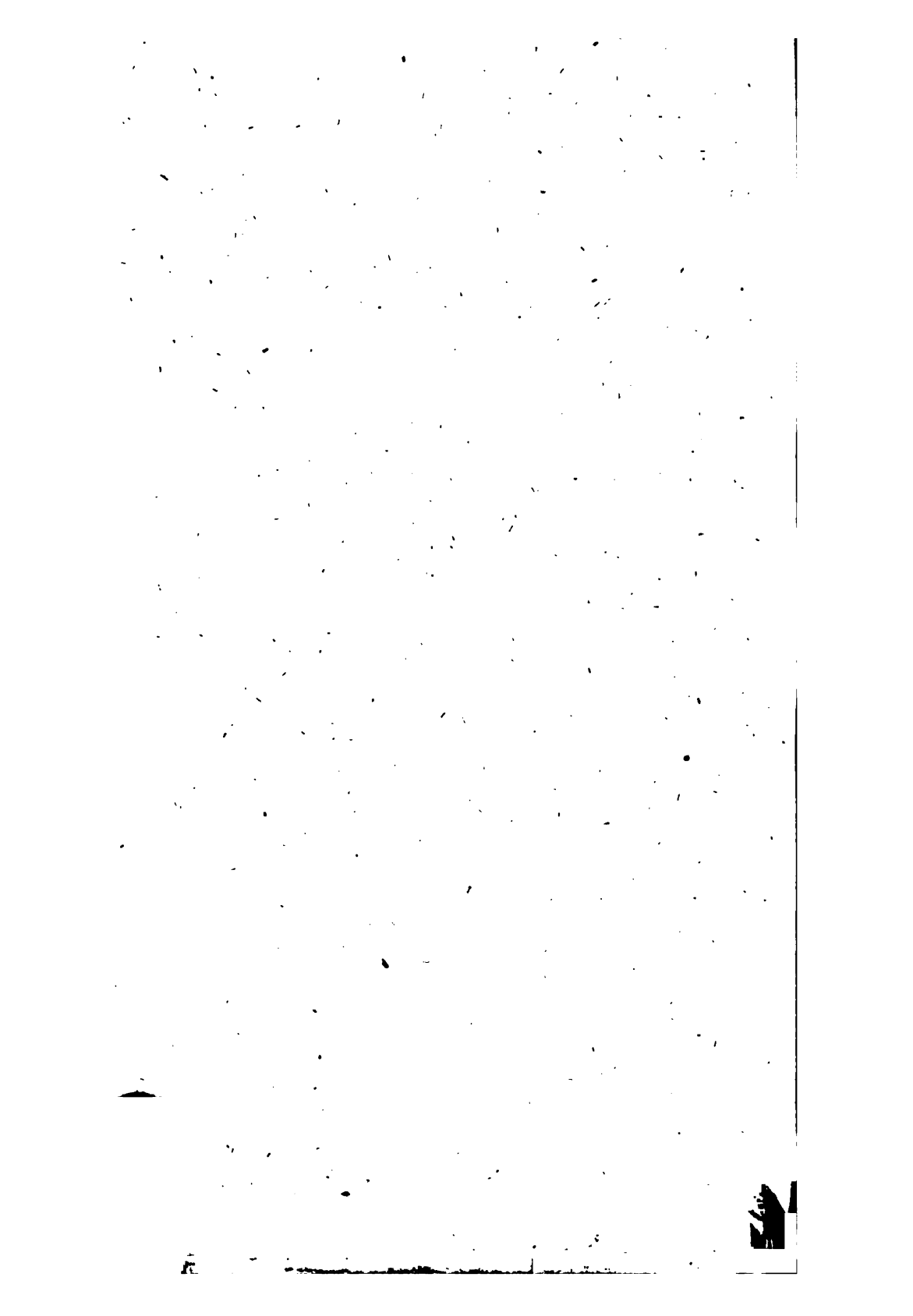
in der Weber'schen Buchhandlung.

1808.

Da die Auflösung einer cubischen, und noch mehr jene einer biquadratischen Gleichung immer sehr schwer ist, so arbeitete ich während meinen Vorlesungen über höhere Mathematik im gegenwärtigen Semester von jeder Gleichung ein Beispiel aus; ich glaube damit dem Anfänger ein angenehmes Geschenk zu machen, wenn ich sie als Zugabe zum ersten Theile meines mathematischen Lehrbuches dem Drucke übergebe.

Landshut den 30. Dezember 1807.

Magold.



Beyspiel zu §. 177.

Man soll die 3 Wurzeln nachstehender cubischen Gleichung finden:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

Auflösung:

1) Man eliminire das zweite Glied, das ist, man nehme $x = y + \frac{3}{3} = y + 1$, so wird

2)
$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ -3x^2 &= \quad -3y^2 - 6y - 3 \\ -4x &= \quad\quad -4y - 4 \\ +12 &= \quad\quad\quad +12, \text{ mithin} \end{aligned}$$

3) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = y^3 - 7y + 6 = 0$, also

4) $y^3 - 7y + 6 = y^3 - fy - g$ (§. 177 *N.* 3) und $f = 7$; $g = -6$, also

5) $g^2 = 36$; $f^3 = 343$; $\frac{4}{27} f^3 = \frac{4.343}{27} = \frac{1372}{27}$

$$g^2 - \frac{4}{27} f^3 = 36 - \frac{1372}{27} = \frac{972 - 1372}{27}$$
$$= -\frac{400}{27}$$

6) Folglich nach §. 177. *Nro.* 11.

$$y = \sqrt[3]{[-3 + \tfrac{1}{2}\sqrt{-\tfrac{400}{27}}]} + \sqrt[3]{[-3 - \tfrac{1}{2}\sqrt{-\tfrac{400}{27}}]}$$

7) Da nun $\sqrt{-\frac{400}{27}}$ eine unmögliche Größe, so muß nach der *II.* Anmerk. jedes Glied in eine Reihe aufgelöst werden.

8) Es ist nämlich

$$\sqrt[3]{[-3+\tfrac{1}{2}\sqrt{-\tfrac{100}{27}}]} = \sqrt[3]{[-3+\sqrt{-\tfrac{100}{27}}]}$$

$$= [-3-3+\sqrt{-\tfrac{100}{27}}]^{\frac{1}{3}};$$ within

9) Vermög §. 139 *III.* Zusatz:

$$a = -3;\ \frac{b}{a} = Q = -\frac{1}{3}\sqrt{-\frac{100}{27}}$$

$$= -\sqrt{-\frac{100}{243}};\ m = 1;\ n = 3,$$ also

10) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[3]{-3}$

$$\frac{m}{n} A Q = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{-3}\sqrt{-\frac{100}{243}}$$

$$\frac{m-n}{2n} B Q = +\frac{1.100}{3^2.243}\sqrt[3]{-3}$$

$$\frac{m-2n}{3n} C Q = +\frac{1.5.100}{9^2.243}\sqrt[3]{-3}\sqrt{-\frac{100}{243}}$$

$$\frac{m-3n}{4n} D Q = -\frac{1.2.5.100^2}{3.9^2.243^2}\sqrt[3]{-3};$$

11) Die Fortsetzung ist in einer angefügten Tabelle enthalten bis *Nro.* 13.

14) $x = y + 1$ (*Nro.* t_2) $= -3 + 1 = -2$;

15) Um die beiden übrigen Wurzeln zu finden, so dividire man die gegebene cubische Gleichung mit dem einfachen Factor $x + 2$, so wird

16) $[x^3 - 3x^2 - 4x + 12] : (x + 2) = x^2 - 5x + 6$

17) Man setze nun diese quadratische Gleichung $= 0$ also

$x^2 - 5x + 6 = 0$, mithin

$x^2 - 5x = -6$, so wird §. 159.

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25 - 24}{4}}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \text{ folglich}$$

18) Die 3 Werthe von x

I. $x = -2$ (*Nro.* 14.)

II. $= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = +3$

III. $= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = +2$

Beispiel zu §. 180.

Nachstehende biquadratische Gleichung aufzulösen:

$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0$.

Auflösung:

1) Man eliminire das zweite Glied nach §. 173, setze also $x = y + \frac{3}{4}$ so wird

2)
$$\begin{array}{rl}
x^4 = & y^4 + 3\left\{y^3 + \frac{27}{8}\right.\left\{y^2 + \frac{27}{16}\right.\left\{y + \frac{81}{16^2}\right. \\
-3x^3 = & \quad -3\left\{\quad -\frac{27}{4}\right.\left\{\quad -\frac{81}{16}\right.\left\{\quad -\frac{81}{4.16}\right. \\
-7x^2 = & \qquad\qquad -7\left\{\quad -\frac{21}{2}\right.\left\{\quad -\frac{63}{16}\right. \\
+27x = & \qquad\qquad\qquad\qquad +27\left\{\quad +\frac{81}{4}\right. \\
-18 = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -18
\end{array}$$

mithin

---

3) $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18$

$$= y^4 - \frac{83}{8}y^2 + \frac{105}{8}y - \frac{675}{16^2} = 0$$

folglich nach §. 180. *N.* 2.

4) $y^4 - \frac{83}{8} y^2 + \frac{105}{8} y - \frac{675}{16^2}$

$= y^4 - ay^2 - by - c = 0$

$= y^4 - 2fy^2 - 8\sqrt{h}.y + f^2 - 4g = 0$

5) Nun ist also:

$f = \frac{1}{2} a = \frac{83}{16}$; $h = \frac{b^2}{64} = \frac{105^2}{16^3}$

$g = \frac{1}{16} a^2 + \frac{1}{4} c = \frac{1}{16} \cdot \frac{83^2}{8^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{675}{16^2}$

$= \frac{7564}{1024} = \frac{1891}{16^2}$

6) Man bilde also nach §. 180. *Nro.* 3. die cubische Gleichung, so wird

7) $z^3 - fz^2 + gz - h$

$= z^3 - \frac{83}{16} z^2 + \frac{1891}{16^2} z - \frac{11025}{16^3} = 0$

8) Da man jetzt die 3 Wurzeln p, q, r dieser cubischen Gleichung nach Cardans Regel zu bestimmen hat, so muß man wieder das zweite Glied eliminiren, man setze also

$z = u + \frac{f}{3} = u + \frac{1}{3} \cdot \frac{83}{16} = u + \frac{83}{3.16}$, so wird

9)
$$\begin{array}{rl}
z^3 = & u^3 + \frac{83}{16} \\
-\frac{83}{16} z^2 = & -\frac{83}{16} \\
+\frac{1891}{16^2} z = & \\
-\frac{11025}{16^3} &
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
u^2 + \frac{83^2}{3.16^2} \\
-\frac{83^2}{16.24} \\
+\frac{1891}{16^2}
\end{array}
\right\}
\left\{
\begin{array}{l}
u + \frac{83^3}{3^3.16^3} \\
-\frac{83^3}{3^2.16^3} \\
+\frac{1891.83}{3.16^3} \\
-\frac{11025}{16^3}
\end{array}
\right.$$

10) $z^3 - \frac{83}{16} z^2 + \frac{1801}{16^2} z - \frac{11025}{16^3} = u^3 - \frac{1216}{3.16^2} u - \frac{28072}{3^3.16^3} = 0 = u^3 - \frac{19}{12} u - \frac{7}{27} = 0$

11) Man subsumire diese Gleichung unter jene §. 177 *Nro.* 3, so wird, wenn man allda statt y den Buchstaben u setzet

$$u^3 - f' u - g' = u^3 - \frac{19}{12} u - \frac{7}{27} = 0, \text{ mithin}$$

12) $f' = \frac{19}{12}$; und $g, = \frac{7}{27}$

13) Da nun ferner §. 177 *Nro.* 11.

$$u = \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2} g' + \tfrac{1}{2} \sqrt{(g'^2 - \tfrac{4}{27} f'^3)}]} + \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2} g' - \tfrac{1}{2} \sqrt{(g'^2 - \tfrac{4}{27} f'^3)}]}$$

so wird gegenwärtig

14) $u = \sqrt[3]{[\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{27} + \frac{1}{2} \sqrt{(\frac{7^2}{27^2} - \frac{4}{27} \cdot \frac{19^3}{12^3})]} + \sqrt[3]{[\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{27} - \frac{1}{2} \sqrt{(\frac{7^2}{27^2} - \frac{4}{27} \cdot \frac{19^3}{12^3})]}}$

15) Es ist aber hier $\frac{4}{27} f'^3 > g'^2$, mithin die Quadratwurzel eine unmögliche Größe, folglich muß man beide Theile nach §. 177 *II.* Anmerk. in Reihen auflösen, wo sie aber bei gegenwärtiger Form divergiren, das ist, die folgenden Glieder immer größer werden. Um nun

convergirende Reihen zu erhalten, verwechsle man die beiden Glieder des Binomiums, das ist, man setze:

16) $$u = \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{7^2}{27^2} - \frac{4}{27}\cdot\frac{19^3}{12^3}\right)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{27}\right]} - \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{7^2}{27^2} - \frac{4}{27}\cdot\frac{19^3}{12^3}\right)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{27}\right]}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left[\sqrt{\left(\frac{7^2}{27^2} - \frac{1}{27}\cdot\frac{19}{12^2.3}\right)} + \frac{7}{27}\right] - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left[\sqrt{\left(\frac{7^2}{27^2} - \frac{1}{27}\cdot\frac{19^3}{12^2.3}\right)} - \frac{7}{27}\right]$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{27^2}\cdot 7^2 - \frac{1}{27^2}\cdot\frac{9.19^3}{12^2}\right)} + \frac{1}{27}\cdot 7\right] - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{27^2}7^2 - \frac{1}{27^2}\cdot\frac{9.19^3}{12^2}\right)} - \frac{1}{27}.7\right]$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{27}\sqrt{\left(7^2 - \frac{9.19^3}{12^2}\right)} + \frac{1}{27}\cdot 7\right] - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{27}\sqrt{\left(7^2 - \frac{9.19^3}{12^2}\right)} - \frac{1}{27}7\right]$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left[\sqrt{\left(\frac{7^2.12^2 - 9.19^3}{12^2}\right)} + 7\right] - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left[\sqrt{\left(\frac{7^2.12^2 - 9.19^3}{12^2}\right)} - 7\right]$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left[\frac{\sqrt{-54675}}{12} + 7\right] - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left[\frac{\sqrt{-54675}}{12} - 7\right]$$

17) Die Fortsetzung ist in einer angefügten Tabelle enthalten bis *Nro.* 20.

21) Mithin ist

$$z = u + \frac{83}{3.16}\ (N.\ 8.) = \frac{83}{3.16} - 0{,}1666666$$

$$= \frac{83 - 7{,}9999968}{3.16} = \frac{75{,}0000032}{3 \cdot 16}$$

$$= \frac{25{,}0000011}{16} \text{ also}$$

22) $z = \frac{25}{16} = p$ (*N.* 8.)

23) Um nun die beiden übrigen Wurzeln q und r zu finden, so muß die Gleichung *N.* 7. durch den Factor $z - \frac{25}{16}$ dividirt werden.

$$z^3 - \frac{83}{16}z^2 + \frac{1891}{16^2}z - \frac{11025}{16^3} = 0\,[z^2 - \frac{58}{16}z + \frac{441}{16^2}$$

$$(z - \frac{25}{16})$$

$$z^3 - \frac{25}{16}z^2$$

$$- \quad +$$

$$- \frac{58}{16}z^2 + \frac{1891}{16^2}z - \frac{11025}{16^3}$$

$$(z - \frac{25}{16})$$

$$- \frac{58}{16}z^2 - \frac{1450}{16^2}z$$

$$+ \quad +$$

$$\frac{441}{16^2}z - \frac{11025}{16^3}$$

$$(z - \frac{25}{16})$$

$$\frac{441}{16^2}z - \frac{11025}{16^3}$$

$$- \quad +$$

$$- \quad -$$

21) Setzet man nun: $z^2 - \frac{58}{16}z + \frac{441}{16^2} = 0$, mithin

$z^2 - \frac{58}{16}z = -\frac{441}{16^2}$, so wird

25) $z = \frac{29}{16} \pm \sqrt{\left(\frac{841}{16^2} - \frac{441}{16^2}\right)} = \frac{29}{16} \pm \sqrt{\frac{400}{16^2}}$

$= \frac{29}{16} \pm \frac{20}{16}$, folglich

26) $p = \frac{25}{16}$ (*N.* 22.);

$q = \frac{29}{16} + \frac{20}{16} = \frac{49}{16}$

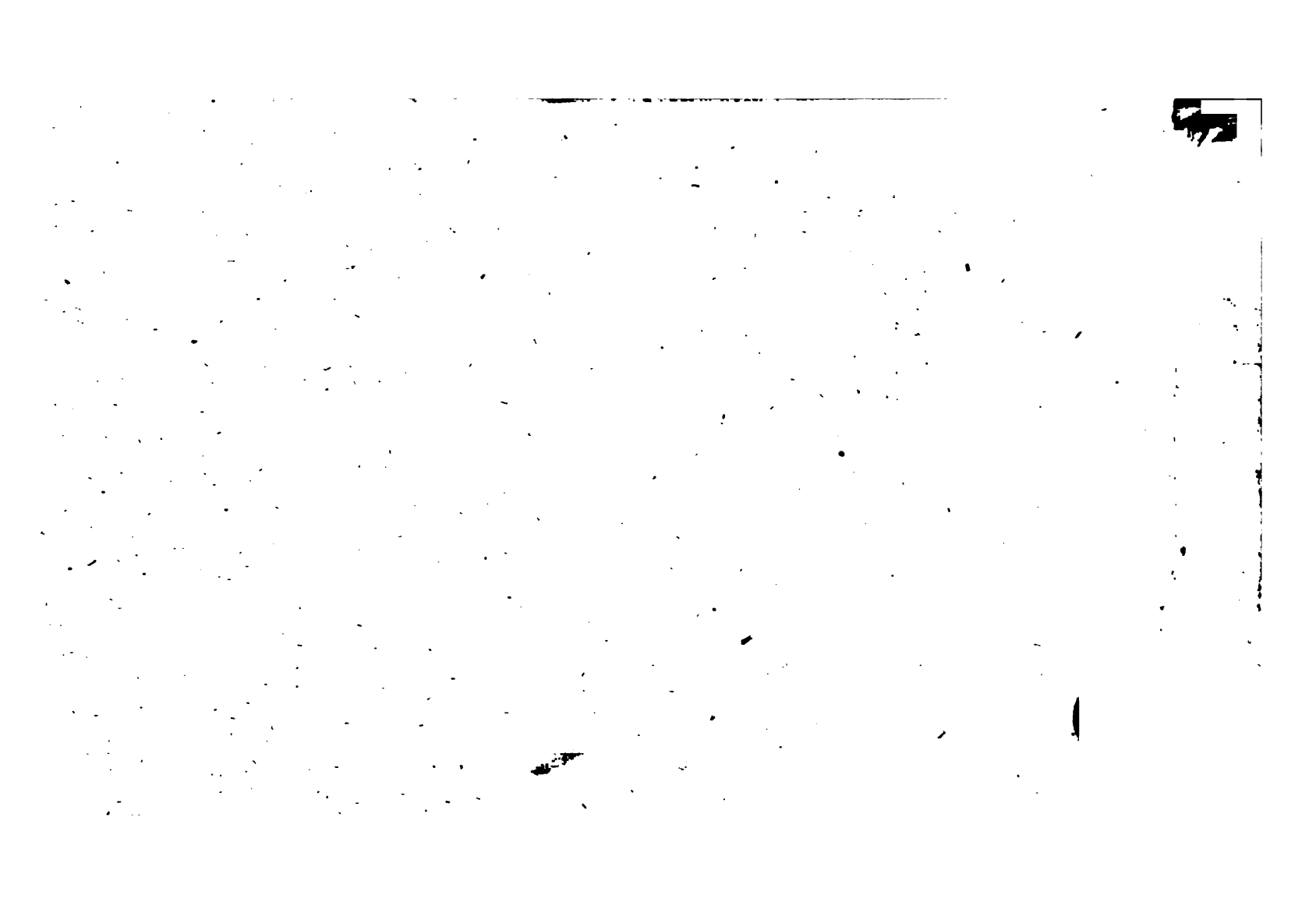
$r = \frac{29}{16} - \frac{20}{16} = \frac{9}{16}$ sind die 3 Wurzeln der cubischen Gleichung *N.* 7.

27) Da in der biquadratischen Gleichung Nro. 4 die Größe $\sqrt{h}$ negativ ist, so werden vermög §. 179. Zusatz die vier Wurzeln oder Werthe von y

I. $\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$
II. $\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = \frac{5}{4} - \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
III. $-\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$
IV. $-\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = -\frac{5}{4} - \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{15}{4}$

28. Da endlich vermög *Nro.* 1. $x = y + \frac{3}{4}$, so sind die vier Werthe von x für die gegebene Gleichung

I. $x = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$
II. $x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$
III. $x = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2$
IV. $x = -\frac{15}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{12}{4} = -3$



$$\frac{100}{243}\sqrt[3]{\ } - 3\sqrt{\ } - \frac{100}{243} - \frac{1.2.}{3.9^2}$$

$$\frac{1.100}{3^2.243} - \frac{1.5.100}{9^2.243}\sqrt{\ } - \frac{100}{243}$$

$$\frac{100}{3^2.243} - \frac{2.5.100^2}{3.9^2.243^2} \cdots$$

$$387555 = -2,9962895 =$$

$$\frac{m-4n}{5n}EQ + \frac{m-5n}{6n}FQ +$$

$$\sqrt[3]{\frac{12^2}{54675}} - \frac{2.5.7^4.12}{3^5.54675\sqrt{\ }-54}$$

$$\sqrt{\frac{12^2}{54675}} \mp \frac{2^3.5.7^9.11.12}{3^{11}.6.546}$$

$$\frac{2^6.5.7^{13}.11.12^{11}.17.23.2}{3^{13}.6.30.33.39.54675}$$

$$\frac{.7^9.11.12^7.17.23}{^{11}.6.54675^4} + \frac{2^3.5.7}{3^{11}}$$

$$0,0000025 - 0,0000003 +$$